Amérique du Nord – Mai 2012 – Série ES – Exercice

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80% des clients ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30% des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10% des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.

On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.
On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.
Enfin, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1. Déterminer P_0.

2. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

3. Ecrire la matrice de transition M associée à cette situation.

4. Déterminer la matrice P_2. En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.

5. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1$.

6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.

7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.

8. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

Analyse

Un exercice assez classique sur un graphe probabiliste simple. Parfait pour s'entraîner !

Résolution

Question 1.

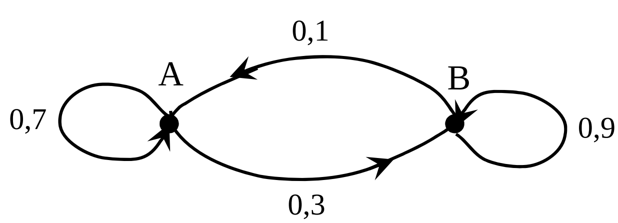
D'après l'énoncé, en 2010, 80% des clients ont choisi l'abonnement de type A. On a donc $a_0 = 80\% = 0,8$ et, 20% des clients ayant choisi l'abonnement de type B (les clients ayant l'obligation de choisir l'un ou l'autre de ces deux abonnements), $b_0 = 20\% = 0,2$.
On a donc :

$$\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}}$$

Question 2.

La situation proposée peut être représentée à l'aide d'un graphe probabiliste où on a les probabilités de transition suivantes :

- A→B : 0,3 car 30% des clients ayant un abonnement de type A changent l'année suivante.
- A→A : 0,7. Cette valeur découle de la probabilité précédente : $100\% - 30\% = 70\%$ des clients ayant un abonnement de type A le conservent l'année suivante.
- B→ A : 0,1 car 10% des clients ayant un abonnement de type A changent l'année suivante.
- B→B : 0,9. Cette valeur découle de la probabilité précédente : $100\% - 10\% = 90\%$ des clients ayant un abonnement de type B le conservent l'année suivante.



Question 3.

Les sommets du graphe étant pris dans l'ordre A, B on a immédiatement :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}}$$

Question 4.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $P_n = P_0 M^n$. D'où $P_2 = P_0 M^2$.

Avec $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7\times 0,7 + 0,3\times 0,1 & 0,7\times 0,3 + 0,3\times 0,9 \\ 0,1\times 0,7 + 0,9\times 0,1 & 0,1\times 0,3 + 0,9\times 0,9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,16 & 0,84 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} P_2 &= P_0 M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,16 & 0,84 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8\times 0,52 + 0,2\times 0,16 & 0,8\times 0,48 + 0,2\times 0,84 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,448 & 0,552 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit alors la probabilité demandée puisqu'il s'agit du premier élément de la matrice ligne $P_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,448 & 0,552 \end{pmatrix}$$

La probabilité qu'un adhérent choisisse l'abonnement de type A en 2012 vaut 0,448.

Question 5.

On a, pour tout entier naturel *n* : $P_{n+1} = P_n M$, soit :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,1b_n & 0,3a_n + 0,9b_n \end{pmatrix}.$$

On a donc : $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,1b_n$. Mais pour tout entier naturel *n*, on a également : $a_n + b_n = 1$, soit $b_n = 1 - a_n$. On en déduit :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0,7a_n + 0,1b_n \\ &= 0,7a_n + 0,1(1 - a_n) \\ &= 0,7a_n + 0,1 - 0,1a_n \\ &= 0,6a_n + 0,1 \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1$.

Question 6.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4a_{n+1} - 1 \\ &= 4(0,6a_n + 0,1) - 1 \\ &= 4 \times 0,6a_n + 0,4 - 1 \\ &= 0,6 \times 4a_n - 0,6 \\ &= 0,6(4a_n - 1) \\ &= 0,6u_n \end{aligned}$$

On a ainsi établi que la suite (u_n) était une suite géométrique de raison 0,6.

Comme $a_0 = 0,8$ il vient immédiatement : $u_0 = 4a_0 - 1 = 4 \times 0,8 - 1 = 3,2 - 1 = 2,2$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $u_0 = 2,2$.

Question 7.

D'après le résultat précédent, on a immédiatement : $u_n = 2,2 \times 0,6^n$.

Comme $u_n = 4a_n - 1$, il vient : $a_n = \frac{1}{4}(u_n + 1) = \frac{1}{4}(2,2 \times 0,6^n + 1) = 0,55 \times 0,6^n + 0,25$.

Pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 2,2 \times 0,6^n$ et $a_n = 0,55 \times 0,6^n + 0,25$

Question 8.

Comme $0,6 \in]-1;1[$, on a immédiatement $\lim_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ puis $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,25$.
Au bout d'un grand nombre d'années, il y aura environ un quart des adhérents du club qui aura choisi l'abonnement A.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,25$
Au bout d'un grand nombre d'années, il y aura environ un quart des adhérents du club qui aura choisi l'abonnement A.

Remarque : la matrice M ne comporte pas de 0 et on sait, dans ce cas, que le graphe probabiliste considéré admet un état stable unique, solution de l'équation matricielle : $XM = X$.

En posant $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, il vient :

$$\begin{aligned} & XM = X \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7x + 0,1y & 0,3x + 0,9y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 0,7x + 0,1y = x \\ 0,3x + 0,9y = y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \ 0,1y = 0,3x \\ \Leftrightarrow & \ y = 3x \end{aligned}$$

En tenant compte de $x + y = 1$, on obtient facilement $x = 0,25$ et $y = 0,75$. On retrouve ainsi la limite de la suite (a_n) sans avoir eu à l'expliciter.