

Amérique du Nord – Série ES – Juin 2005 – Exercice

Les deux questions sont indépendantes.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30% en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
Vérifier que ce pourcentage de baisse est alors égal à environ 6,89%.
2. La première année cet impôt baisse de 5%, la deuxième année la baisse est de 1% et la troisième année de 3%.
 - a. Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
 - b. Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

Analyse

On a affaire ici à un exercice conduisant à diverses manipulations de pourcentages. Il convient d'être rigoureux et précis. Les principales connaissances requises ont trait à l'expression d'une baisse d'un certain pourcentage sous la forme d'une multiplication et à l'élévation à une puissance d'exposant non entier.

Résolution

→ *Question 1.*

Soit t le pourcentage de baisse annuel cherché (on cherche $t > 0$).

Effectuer cinq baisses consécutives de $t\%$ chacune consiste à multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)^5$.

Puisque l'on souhaite que ces cinq baisses soient équivalentes à une baisse globale de 30% (qui consiste à multiplier par $1 - \frac{30}{100}$, c'est à dire 0,7), on doit résoudre :

$$\left(1 - \frac{t}{100}\right)^5 = 0,7 \quad (\text{E})$$

Chaque membre de cette égalité étant strictement positif, on peut les élever à la puissance $\frac{1}{5}$:

$$\left(\left(1 - \frac{t}{100}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}} = 0,7^{\frac{1}{5}}$$

D'où :

$$1 - \frac{t}{100} = 0,7^{\frac{1}{5}}$$

Finalement :

$$t = 100 \left(1 - 0,7^{\frac{1}{5}}\right)$$

En arrondissant à 10^{-2} , on obtient bien 6,89.

Le pourcentage de baisse annuelle cherché est égal à $1 - 0,7^{\frac{1}{5}}$, soit environ 6,89%.

Remarque : on peut également résoudre l'équation (E) en ayant recours aux fonctions logarithme népérien et exponentielle. Cette démarche est moins « efficace » que la démarche proposée mais tout aussi valable pour obtenir le bon résultat !

→ *Question 2.a.*

Les trois baisses considérées correspondent respectivement à des multiplications par :

- $1 - \frac{5}{100} = 0,95$ (baisse de 5%) ;
- $1 - \frac{1}{100} = 0,99$ (baisse de 1%) ;
- $1 - \frac{3}{100} = 0,97$ (baisse de 3%).

Soit alors t le pourcentage global de baisse sur les trois premières années.

$$\text{On a ici : } 1 - \frac{t}{100} = 0,95 \times 0,99 \times 0,97 = 0,912285$$

$$\text{D'où : } t = 100(1 - 0,912285) = 8,7715$$

En arrondissant à 10^{-2} , on obtient $t \simeq 8,77$.

Au bout des trois premières années, l'impôt a globalement baissé d'environ 8,77%.

→ *Question 2.b.*

Soit x le pourcentage annuel de baisse de l'impôt ($x > 0$) sur les deux dernières années.

Dans ces conditions et en tenant compte des calculs menés à la question précédente, la baisse globale de l'impôt sur les cinq années considérées correspond à une multiplication par :

$$0,912285 \times \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$$

$$\text{On doit alors résoudre : } 0,912285 \times \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 0,7$$

D'où :

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{0,7}{0,912285}$$

La quantité $1 - \frac{x}{100}$ étant positive, il vient :

$$1 - \frac{x}{100} = \sqrt{\frac{0,7}{0,912285}}$$

Finalemment :

$$x = 100 \left(1 - \sqrt{\frac{0,7}{0,912285}} \right)$$

En arrondissant à 10^{-2} , on obtient $t \simeq 12,4$.

Pour atteindre l'objectif d'une baisse globale de 30% en cinq ans, le gouvernement doit baisser l'impôt d'environ 12,4% durant les deux dernières années.