Amérique du Sud – Novembre 2004 – Série S - Exercice

Soit f la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=xe^{-x}$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   c) Construire Γ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

2. a) Montrer que, pour tout réel m de $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.
   b) Dans le cas où $m=\frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha<\beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c) Résoudre l'équation $f(x)=m$ dans le cas où $m=0$ et où $m=\frac{1}{e}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_ne^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   où α est le réel défini à la question A.2.b).

   a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n>0$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \ln u_n$.

   a) Montrer que, pour tout *n* entier naturel, on a : $u_n = w_n - w_{n+1}$.

   b) On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

   c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$.

   Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$?

   Si oui, préciser laquelle.

Analyse

Fonction exponentielle et théorème des valeurs intermédiaires sont « au programme » de la première partie. La seconde consiste en l'étude d'une suite récurrente construite à partir de la fonction *f* étudiée dans la première partie.

Résolution

Partie A

→ *Question 1.a)*

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$.

Or, on a le résultat classique (croissances comparées) : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

→ *Question 1.b)*

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de la fonction $x \mapsto -x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$, et de la fonction exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction *f* est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout *x* réel positif, on a alors (dérivée d'un produit) :

$$f'(x) = 1\times e^{-x} - x\times e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$. Il vient alors :

- Pour tout réel *x* de $[0;1[$, $f'(x) > 0$;
- $f'(1) = 0$;
- Pour tout réel x de $]1;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

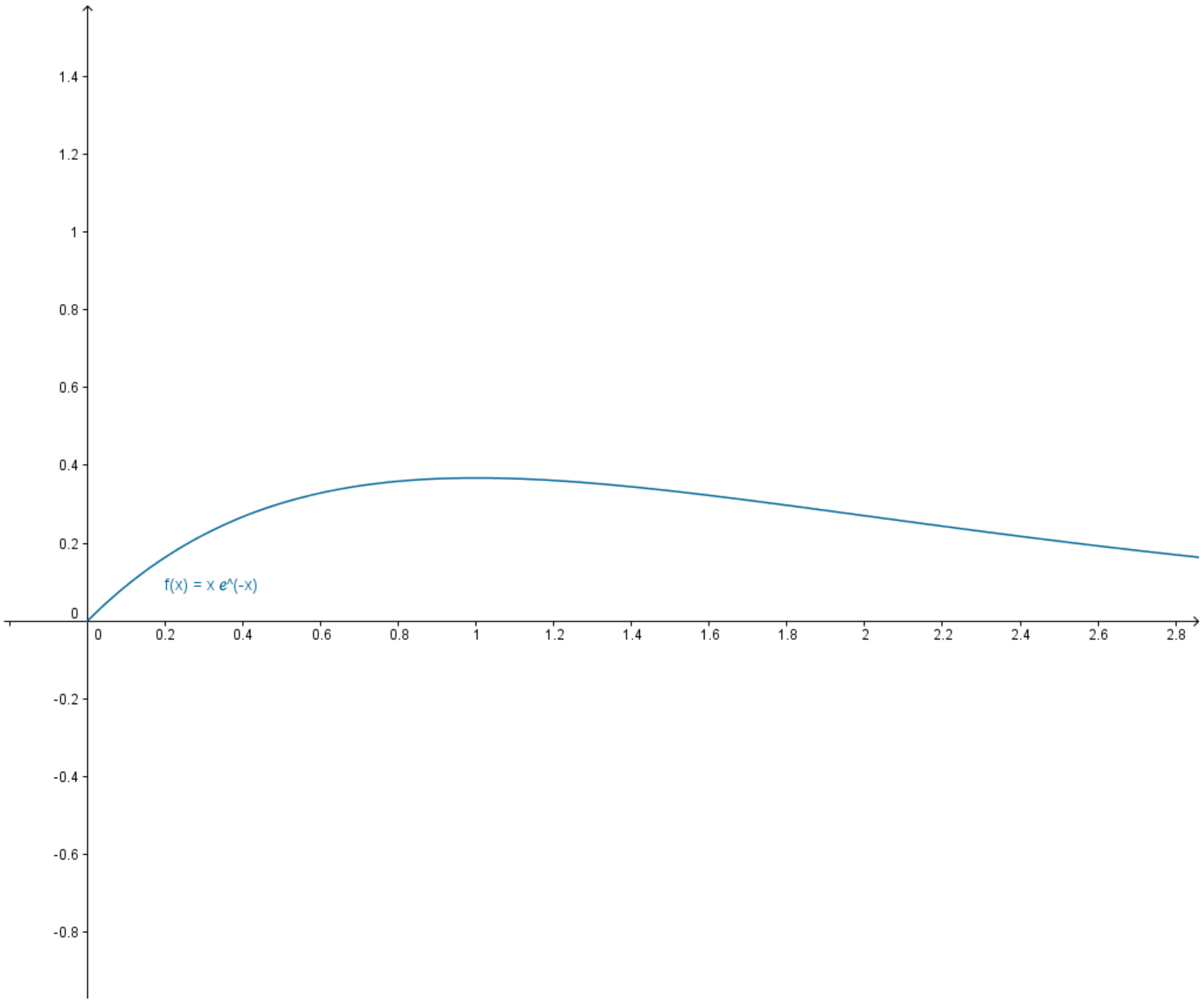
La fonction *f* est strictement croissante sur $[0;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Remarque : de ce qui précède, nous tirons que la fonction f admet un maximum global en 1 et on a : $f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Les résultats des questions précédentes nous fournissent l'essentiel du tableau de variation de la fonction *f*. On le complète en calculant : $f(0) = 0 \times e^{-0} = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

→ *Question 1.c)*



→ *Question 2.a)*

Soit $m \in \left]0;\frac{1}{e}\right[$.

Sur l'intervalle $\left[0;1\right]$, la fonction *f* est continue (en tant que fonction dérivable) et strictement croissante (cf. question 1.b)).

On a, par ailleurs, $f\left(0\right)=0$ et $f\left(1\right)=\frac{1}{e}$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que pour tout réel *m* de l'intervalle $\left[0;\frac{1}{e}\right]$, l'équation $f\left(x\right)=m$ admet une unique solution.

En particulier, si $m \in \left]0;\frac{1}{e}\right[$, en tenant compte de $f\left(0\right)=0$ et $f\left(1\right)=\frac{1}{e}$, on en déduit que la solution se trouvera dans $\left]0;1\right[$.

Sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$, la fonction *f* est continue (en tant que fonction dérivable) et strictement décroissante (cf. question 1.b)).

On a, par ailleurs, $f\left(1\right)=\frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que pour tout réel *m* de l'intervalle $\left]0;\frac{1}{e}\right]$, l'équation $f\left(x\right)=m$ admet une unique solution (une fonction strictement décroissante admettant 0 comme limite en $+\infty$ ne peut s'annuler sur tout intervalle de la forme $\left[a;+\infty\right[$ où elle est définie).

En particulier, si $m \in \left]0;\frac{1}{e}\right[$, en tenant compte de $f\left(1\right)=\frac{1}{e}$, on en déduit que la solution se trouvera dans $\left]1;+\infty\right[$.

En définitive :

> Pour tout réel *m* dans $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f\left(x\right)=m$ admet deux solutions : une dans l'intervalle $\left]0;1\right[$ et l'autre dans l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$.

→ *Question 2.b)*

On suppose ici $m=\frac{1}{4}$ et on note α et β les solutions de $f\left(x\right)=\frac{1}{4}$ avec $\alpha<\beta$ (d'après la question précédente, nous avons donc plus précisément : $\alpha<1<\beta$).

Pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α, nous tabulons la fonction *f* sur $\left[0;1\right]$.

Avec un pas de 10^{-1}, on obtient : $f(0,3) \simeq 0,222 < \frac{1}{4}$ et $f(0,4) \simeq 0,268 > \frac{1}{4}$.

On en déduit : $0,3 < \alpha < 0,4$.

Avec un pas de 10^{-2}, on obtient : $f(0,35) \simeq 0,247 < \frac{1}{4}$ et $f(0,36) \simeq 0,251 > \frac{1}{4}$.

On en déduit finalement : $0,35 < \alpha < 0,36$.

$$\boxed{0,35 < \alpha < 0,36}$$

➔ *Question 2.c)*

Pour $m = 0$, on doit résoudre sur $\mathbb{R}_+$: $xe^{-x} = 0$.
En tenant compte du fait que la fonction exponentielle ne s'annule pas, il vient immédiatement : $xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On a vu à la question 1.b) que $\frac{1}{e} = e^{-1}$ correspondait à la valeur maximale prise par la fonction *f* (en l'occurrence pour $x = 1$). De surcroît, *f* étant strictement croissante sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty[$, on peut affirmer que cette valeur est atteinte uniquement en $x = 1$.
On a donc : $xe^{-x} = e^{-1} \Leftrightarrow x = 1$.

L'équation $f(x) = 0$ admet comme unique solution : 0.
L'équation $f(x) = e^{-1}$ admet comme unique solution : 1.

Partie B

➔ *Question 1.a)*

Nous menons ici un raisonnement par récurrence.

Le réel $u_0 = \alpha$ est strictement positif (cf. A.2.b)). La propriété est vraie au rang 0.
Supposons que la propriété soit vraie au rang *n*, c'est-à-dire supposons : $u_n > 0$.
On a alors : $u_{n+1} = f(u_n)$ (tant que l'on ne connaît pas le signe de u_n, on ne peut écrire u_{n+1} sous cette forme-là !). Comme *f* prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[0;\frac{1}{e}\right]$ et ne s'annule qu'en 0 (cf. A.2.c)), il vient : $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.
La propriété est ainsi vraie au rang $n+1$.
En définitive, la propriété est vraie pour tout *n* entier naturel.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 0$.

→ Question 1.b)

Pour tout n entier naturel, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n \left(e^{-u_n} - 1 \right) = u_n \left(\frac{1}{e^{u_n}} - 1 \right) = \frac{u_n}{e^{u_n}} \left(1 - e^{u_n} \right)$$

On a montré à la question précédente que l'on avait, pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.
On en tire :

- Que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $1 - e^{u_n}$;
- Que : $e^{u_n} > 1$, soit : $1 - e^{u_n} < 0$.

Finalement : pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

→ Question 1.c)

La suite (u_n) est strictement décroissante (cf. question précédente) et minorée par 0 (cf. la question B.1.a)). On en déduit qu'elle converge. Nous notons l sa limite.

Par ailleurs, la suite (u_n) est une suite récurrente à termes strictement positifs avec $u_{n+1} = f(u_n)$, la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$. On en tire que l est solution de l'équation $f(l) = l$.

Sur $\mathbb{R}_+$, on a : $f(x) = x \Leftrightarrow xe^{-x} = x \Leftrightarrow x\left(e^{-x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

L'équation $f(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}_+$: 0.

En définitive :

La suite (u_n) converge vers 0.

→ Question 2.a)

Pour tout entier naturel n, on a :

$$w_n - w_{n+1} = \ln u_n - \ln u_{n+1} = \ln u_n - \ln\left(u_n e^{-u_n}\right) = \ln \frac{u_n}{u_n e^{-u_n}} = \ln \frac{1}{e^{-u_n}} = \ln e^{u_n} = u_n$$

Pour tout entier naturel n, on a : $w_n - w_{n+1} = u_n$.

→ *Question 2.b)*

En utilisant le résultat de la question précédente, on a, pour tout *n* entier naturel :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ &= \left(w_0 - \cancel{w_1}\right) + \left(\cancel{w_1} - \cancel{w_2}\right) + \left(\cancel{w_2} - \cancel{w_3}\right) + \ldots + \left(\cancel{w_{n-1}} - \cancel{w_n}\right) + \left(\cancel{w_n} - w_{n+1}\right) \\ &= w_0 - w_{n+1} \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

Remarque : on aurait également pu mener une récurrence.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

→ *Question 2.c)*

On a vu à la question B.1.c) que l'on avait : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-w_{n+1}\right) = +\infty$

D'où, finalement (par addition) : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(w_0 - w_{n+1}\right) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

→ *Question 3.*

Comme $v_0 > 0$ on démontre, comme on l'a fait à la question B.1.a) que l'on a : $v_n > 0$ pour tout entier naturel *n*. La récurrence apparaissant dans la définition de la suite $\left(v_n\right)$ peut donc s'écrire : $v_{n+1} = f\left(v_n\right)$.

On en déduit, par récurrence, que si l'on a : $u_1 = v_1$ alors on aura $u_n = v_n$ pour tout entier naturel *n* non nul.

L'égalité $u_1 = v_1$ est équivalente à : $f\left(u_0\right) = f\left(v_0\right)$. Or : $f\left(u_0\right) = f\left(\alpha\right) = \dfrac{1}{4}$ et à la question A.2.b), nous avons montré que l'équation $f\left(x\right) = \alpha$ admettait deux solutions strictement positives distinctes : α et β. On en déduit que pour $v_0 = \beta \neq \alpha$ (et seulement pour cette valeur), on aura bien $u_1 = v_1$.

Pour $v_0 = \beta \neq \alpha$, on aura : $u_n = v_n$ pour tout entier naturel *n* non nul.