Centres étrangers – Juin 2010 – Série S – Exercice

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y=e^x$ et $y=-x^2-1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathscr{T}$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

a. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A.

b. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B.

c. En déduire que les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E)\ :\ e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$$

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty;0[$, $e^{2x}-4<0$ et $4e^x(x-1)<0$.

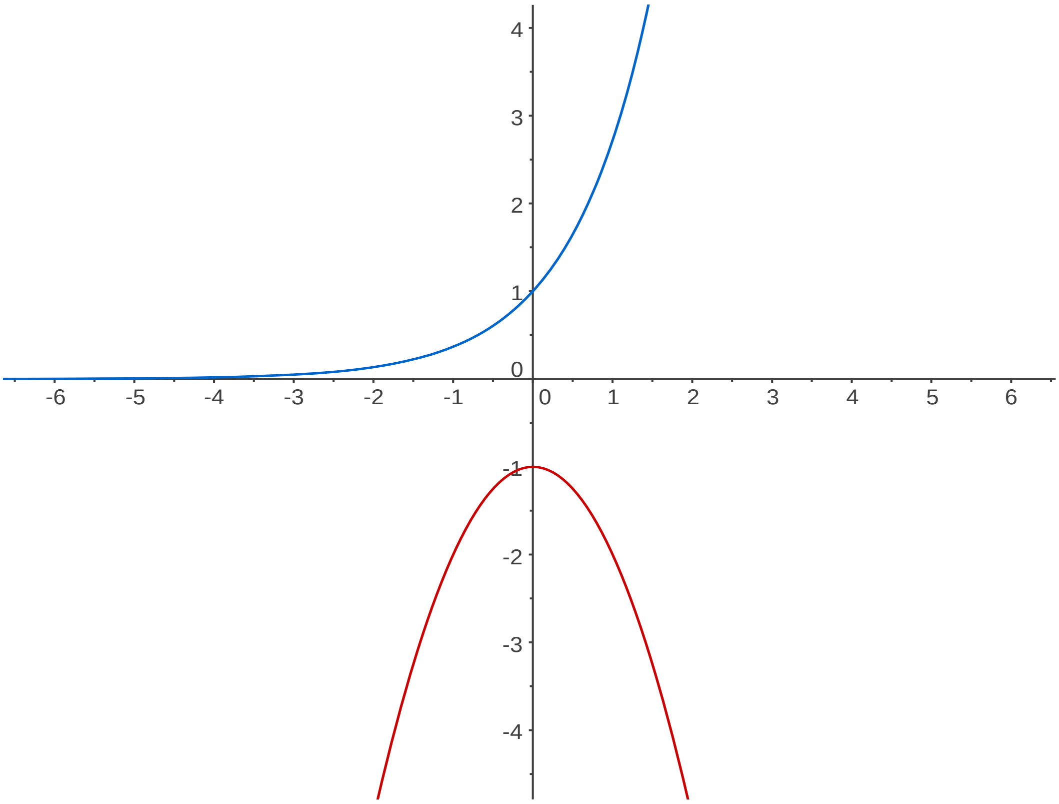
b. En déduire que l'équation (E) n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty;0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathcal{T}_\mathrm{A})$ et $(\mathcal{T}_\mathrm{B})$ sont confondues.



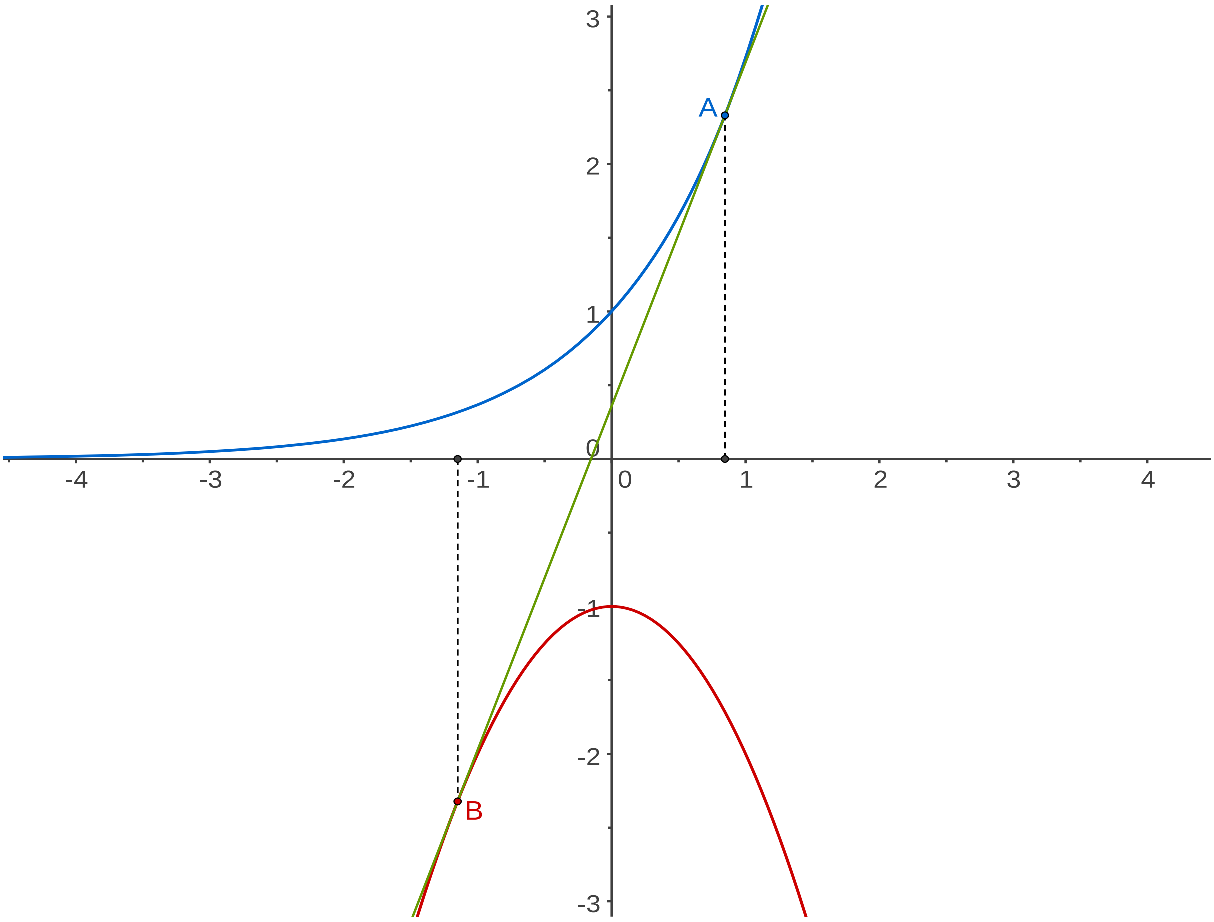
Annexe 1

Analyse

Un exercice assez original qui, à partir d'un problème géométrique (recherche d'une tangente commune à deux courbes) nous conduit à aborder divers thèmes d'algèbre (système d'équations) et d'analyse (fonction exponentielle, théorème des valeurs intermédiaires), la résolution du système (non linéaire) faisant appel à l'étude d'une fonction pour, justement, la mise en œuvre du théorème des valeurs intermédiaires.

Résolution

Question 1.



Anticipant quelque peu la question suivante, nous notons respectivement A et B les points d'intersection de la tangente tracée avec, respectivement, les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ et a et b leurs abscisses. Par lecture graphique (cf. les segments en pointillés), on obtient :

$$\boxed{a \simeq 0,85 \ \text{ et } \ b \simeq -1,2}$$

Question 2.a.

La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée elle-même, l'équation réduite de la tangente au point A de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ d'abscisse a s'écrit :

$$y = e^a(x-a)+e^a = e^a x + e^a - ae^a$$

Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ au point A d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ est :

$$y = e^a x + e^a - ae^a$$

Question 2.b.

De façon similaire, la fonction $x \mapsto -x^2 - 1$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto -2x$, l'équation réduite de la tangente au point B de la courbe $(\mathscr{C}_2)$ d'abscisse b s'écrit :

$$y = -2b(x-b)+(-b^2-1) = -2bx + 2b^2 - b^2 - 1 = -2bx + b^2 - 1$$

Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ au point B d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$ est :

$$y = -2bx + b^2 - 1$$

Question 2.c.

Les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si, et seulement si, elles admettent la même équation réduite, c'est-à-dire si, et seulement si, les coefficients respectifs de ces équations sont identiques.

D'après les équations obtenues aux questions précédentes, il vient immédiatement :

$$(\mathscr{T}_A) \text{ et } (\mathscr{T}_B) \text{ sont confondues} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b = e^a \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

$$(\mathscr{T}_A) \text{ et } (\mathscr{T}_B) \text{ sont confondues} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$$

Question 2.d.

Dans le système (S), la première équation nous permet de procéder par substitution :

$$\begin{cases} e^a & = -2b \\ e^a - ae^a & = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a & = -2b \\ e^a - ae^a & = \left(-\dfrac{1}{2}e^a\right)^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a & = -2b \\ e^a - ae^a & = \dfrac{1}{4}e^{2a} - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a & = -2b \\ 4e^a - 4ae^a & = e^{2a} - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a & = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$

Le système (S) $\begin{cases} e^a & = -2b \\ e^a - ae^a & = b^2 - 1 \end{cases}$ est équivalent au système (S') $\begin{cases} e^a & = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

Question 3.a.

On a d'abord : $x \in]-\infty\,;0[\Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 < -3 \Rightarrow e^{2x} - 4 < 0$.

On a aussi : $x \in]-\infty\,;0[\Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x - 1 < -1 \Rightarrow x - 1 < 0$.

Comme la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour le produit $4e^x$.

On a donc : $x \in]-\infty\,;0[\Rightarrow 4e^x(x-1) < 0$.

Finalement :

Pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;0[$, on a : $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

Question 3.b.

L'équation (E) se récrit : $e^{2x} - 4 + 4e^x(x-1) = 0$.

Or, on vient de montrer que pour tout x strictement négatif, on avait : $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$. On en tire : $e^{2x} - 4 + 4e^x(x-1) < 0$. Il n'existe donc pas de réel strictement négatif, solution de l'équation (E).

L'équation (E) n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

Question 3.c.

Etudions la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction linéaire. La fonction exponentielle est également dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit ainsi que la fonction composée $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto 4(x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine. La fonction $x \mapsto 4e^x(x-1)$ est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto -4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction constante.

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2e^{2x} \cancel{+4e^x} + 4xe^x \cancel{-4e^x} = 2e^{2x} + 4xe^x = 2e^x\left(e^x + 2x\right)$$

Pour tout x réel positif, on a : $e^x > 0$, d'où : $e^x + 2x > 0$, puis : $f'(x) = 2e^x\left(e^x + 2x\right) > 0$.

On en conclut immédiatement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [0\,;+\infty[\,.}$$

Question 3.d.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ puisque d'après la question précédente, elle est dérivable et donc continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (question précédente) et donc sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Par ailleurs, on a :

$$f(0) = e^{2\times 0} + 4\times 0\times e^0 - 4\times e^0 - 4 = 1 + 0 - 4 - 4 = -7 < 0$$

Et :

$$f(1) = e^{2\times 1} + 4\times 1\times e^1 - 4\times e^1 - 4 = e^2 \cancel{+4e} \cancel{-4e} - 4 = e^2 - 4 > 0 \ \text{(car } e > 2\text{)}$$

Le théorème de la bijection nous permet alors d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ (c'est-à-dire l'équation (E)) admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;1[$.

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la fonction *f* est strictement croissante. On a donc :

$$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ f(x) \geq f(1) > 0$$

La fonction *f* ne s'annule pas sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$: l'équation (E) n'admet pas de solution sur cet intervalle.

En définitive :

$$\boxed{\text{L'équation } (\mathrm{E}) \text{ admet une unique solution sur l'intervalle } [0\,;+\infty[.}$$

Remarque : on aurait également pu raisonner directement sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ en considérant $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On montre facilement que l'on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

D'après la démarche que nous avons adoptée ci-dessus, on a : $0 < a < 1$.

En tabulant alors la fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;1]$ avec un pas égal à 10^{-1}, on obtient : $f(0,8) < 0 < f(0,9)$ et on en déduit :

$$0,8 < a < 0,9$$

En tabulant enfin la fonction *f* sur l'intervalle $[0,8\,;0,9]$ avec un pas égal à 10^{-2}, on obtient : $f(0,84) < 0 < f(0,85)$ et on en déduit :

$$\boxed{0,84 < a < 0,85}$$

Question 4.

Dans le système (S), nous avons la relation : $e^a=-2b$, soit : $b=-\frac{1}{2}e^a$.

L'encadrement précédent nous donne :

$$0,84 < a < 0,85 \Leftrightarrow e^{0,84} < e^a < e^{0,85} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{0,84} > -\frac{1}{2}e^a > -\frac{1}{2}e^{0,85} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{0,85} < b < -\frac{1}{2}e^{0,84}$$

Comme : $-\frac{1}{2}e^{0,85} \simeq -1,17$ et $-\frac{1}{2}e^{0,84} \simeq -1,16$ il vient immédiatement :

$$\boxed{-1,2 < b < -1,1}$$