Liban – Mai 2012 – Série ES – Exercice

1ère partie : Etude d'une fonction.

On considère la fonction *f* définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f\left(x\right)=xe^{x}-e^{x}-8$.

1. En écrivant $f\left(x\right)=e^{x}\left(x-1\right)-8$, déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

2. Montrer que $f'\left(x\right)=xe^{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de *f* sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

3. Dresser le tableau de variation complet de *f* sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

4. a) Montrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet sur $\left[0\,;+\infty\right[$ une unique solution *a*.

b) Montrer que $2{,}040<a<2{,}041$.

c) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $f\left(x\right)$ en fonction des valeurs de *x* sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

5. a) Montrer que la fonction *g* définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $g\left(x\right)=xe^{x}-2e^{x}-8x$ est une primitive de *f* sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

b) Calculer la valeur exacte de $\int_{3}^{5} f\left(x\right)dx$.

2ème partie : Application à une situation économique

Une entreprise fabrique *x* milliers d'objets avec *x* appartenant à $\left[0\,;5\right]$.
La fonction *f* de la 1ère partie modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaine d'euros.
Pour une quantité *x* donnée, si $f\left(x\right)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si $f\left(x\right)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.
En utilisant les résultats de la 1ère partie, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. A partir de combien d'objets produits, l'entreprise commence-t-elle à réaliser des bénéfices ?

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.

Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur $\left[0\,;5\right]$ (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

Analyse

Une structure d'exercice classique : une première partie consacrée à l'étude du modèle (ici celui du bénéfice réalisé en fonction de la production) et, dans un deuxième temps, une exploitation de cette étude (ici, pour évaluer un bénéfice moyen).

Résolution

1ère partie : Etude d'une fonction

Question 1.

On a : $f(x) = e^x(x-1) - 8$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

On en déduit (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(x-1)\right] = +\infty$ puis, immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Question 2.

Pour tout *x* réel positif, on a :

$$f'(x) = \cancel{1\times e^x} + x\times e^x \cancel{-e^x} + 0 = x\times e^x = xe^x$$

$$\boxed{f'(x) = xe^x}$$

Question 3.

On a immédiatement :

- $f'(0) = 0\times e^0 = 0\times 1 = 0$;
- Pour tout *x* réel strictement positif, $f'(x) > 0$ comme produit de deux réels strictement positifs.

On déduit immédiatement de ce qui précède que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Comme on a calculé la limite de la fonction *f* en $+\infty$, il nous reste à évaluer $f(0)$.
On a :

$$f(0) = 0\times e^0 - e^0 - 8 = 0 - 1 - 8 = -9$$

Forts des éléments précédents, nous pouvons dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	-9 $\nearrow$	$+\infty$

Question 4.a.

La fonction *f* est continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ puisqu'elle y est dérivable.
A la question précédente, nous avons également vu qu'elle y était strictement croissante.
On a par ailleurs : $f(0)=-9$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction *f* prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $[-9\,;+\infty[$.
On en déduit :

L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Question 4.b.

On a :

$$f(2{,}040)\simeq -1{,}77\times 10^{-3}<0$$
$$f(2{,}041)\simeq 1{,}4\times 10^{-2}>0$$

D'où, immédiatement :

$2{,}040<a<2{,}041$

Question 4.c.

Comme la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ et que l'on a $f\left(a\right)=0$, il vient immédiatement :

- Pour tout *x* dans l'intervalle $\left[0\,;a\right[$, $f\left(x\right)<0$.
- $f\left(a\right)=0$.
- Pour tout *x* dans l'intervalle $\left]a\,;+\infty\right[$, $f\left(x\right)>0$.

Question 5.a.

La fonction *g* est dérivable sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel *x* positif, on a :

$$g'\left(x\right)=1\times e^x+x\times e^x-2e^x-8\times 1=e^x+xe^x-2e^x-8=xe^x-e^x-8=f\left(x\right)$$

On déduit de ce qui précède :

La fonction *g* définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par $g\left(x\right)=xe^x-2e^x-8x$
est une primitive de la fonction *f* sur cet intervalle.

Question 5.b.

On a :

$$\begin{aligned}\int_3^5 f\left(x\right)dx&=\left[g\left(x\right)\right]_3^5\\&=\left[xe^x-2e^x-8x\right]_3^5\\&=5\times e^5-2\times e^5-8\times 5-\left(3\times e^3-2\times e^3-8\times 3\right)\\&=3e^5-40-\left(e^3-24\right)\\&=3e^5-e^3-16\end{aligned}$$

$$\int_3^5 f\left(x\right)dx=3e^5-e^3-16$$

2ème partie : Application à une situation économique

Question 1.

A la question 4.c. de la première partie, nous avons établi que la fonction *f* prenait des valeurs strictement positives pour tout réel x strictement supérieur à a. Par ailleurs, à la question 4.b. de cette même partie, nous avons obtenu l'encadrement : $2,040 < a < 2,041$. Puisque la variable x mesure une quantité en milliers d'objets, on en déduit immédiatement :

L'entreprise dégagera des bénéfices à partir de 2041 objets produits.

Question 2.

Pour obtenir la valeur moyenne du bénéfice pour une production comprise entre 3 et 5 milliers d'objets, on commence par calculer la valeur moyenne m de la fonction *f* sur l'intervalle $[3\,;5]$. En utilisant le résultat obtenu à la question 5.b. de la première partie, il vient :

$$m = \frac{1}{5-3}\int_3^5 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(3e^5 - e^3 - 16\right)$$

Puisque $f(x)$ correspond à des centaines d'euros et que le résultat est demandé à l'euro près, nous donnons une valeur approchée de m arrondie à 10^{-2} :

$$m = \frac{1}{2}\left(3e^5 - e^3 - 16\right) \simeq 204,58$$

On en conclut alors :

Pour une production comprise entre 3 et 5 milliers d'objets, le bénéfice moyen réalisé par l'entreprise s'élève à 20 458 euros (valeur arrondie à l'euro).