

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

1. Etude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 e^x - 1$$

Etudier le sens de variation de la fonction g .

b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703; 0,704]$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. Etude de la fonction f

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Analyse

Une étude de fonction assez simple qui passe par l'étude du signe d'une fonction auxiliaire. Un sujet classique qui requiert une bonne connaissance de la fonction exponentielle et des fonctions en général (dérivation, théorème des valeurs intermédiaires notamment).

Résolution

1. Etude d'une fonction auxiliaire

Question a.

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit (de la fonction carré et de la fonction exponentielle) et somme ($x \mapsto -1$) de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout x réel positif, on a :

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

Pour tout réel x , on a $e^x > 0$.

Pour tout réel positif x , on a $x \geq 0$ et $x+2 \geq 2 > 0$.

Ainsi, on a, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ $g'(x) \geq 0$ et la fonction g' ne s'annule que pour $x=0$.

On en déduit finalement :

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Question b.

La fonction $x \mapsto x^2e^x$ est continue sur $[0; +\infty[$ comme produit de deux fonction continue sur cet intervalle (la fonction carrée et la fonction exponentielle, toutes deux continues sur \mathbb{R} et donc sur $[0; +\infty[$). Il en va donc de même pour la fonction g .

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ (question précédente).

Enfin, on a : $g(0) = 0^2 \times e^0 - 1 = 0 \times 1 - 1 = -1$ et :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{produit} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{somme} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), la fonction g prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $[-1; +\infty[$. Comme 0 appartient à cet intervalle, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, a , sur $[0; +\infty[$.

Il existe un unique réel positif a tel que $g(a) = 0$.

A la calculatrice, on obtient : $g(0,703) \approx -0,001795 < 0$ et $g(0,704) \approx 0,002048 > 0$.
On a donc $g(0,703) < 0 < g(0,704)$, soit $g(0,703) < g(a) < g(0,704)$ et on en déduit immédiatement : $0,703 < a < 0,704$.

$0,703 < a < 0,704$

Question c.

La fonction g étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on a : $g(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(a) \Leftrightarrow x < a$ et $g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(a) \Leftrightarrow x > a$. Ainsi :

La fonction g prend des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $[0; a[$, s'annule en a et prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $]a; +\infty[$.

2. Etude de la fonction f .

Question a.

On a, en tenant compte de la continuité de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} et donc, en particulier, en 1 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{somme} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(e^x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ et } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{somme} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Question b.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* comme somme de deux fonctions (la fonction exponentielle et la fonction inverse) dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel x strictement positif, on a alors :

$$f'(x) = e^x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

Question c.

Sur \mathbb{R}_+^* , on a $x^2 > 0$. Ainsi, d'après la question b., $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. D'après la question 1.c. on sait que la fonction g prend des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $]0; a[$, s'annule en a et prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $]a; +\infty[$.

On en déduit immédiatement :

- Pour tout réel x de l'intervalle $]0; a[$, $f'(x) < 0$.
- $f'(a) = 0$.
- Pour tout réel x strictement supérieur à a , $f'(x) > 0$.

Finalement :

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; a[$
et strictement croissante sur l'intervalle $]a; +\infty[$.

On en tire, en tenant compte des limites obtenues à la question a. :

x	0	a	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	$+\infty$	$f(a)$	$+\infty$

Avec $f(a) = e^a + \frac{1}{a}$.

Question d.

D'après la question précédente, la fonction f admet un minimum en a et ce minimum vaut

$$f(a) = e^a + \frac{1}{a}.$$

Mais on sait que $g(a) = 0 = a^2 e^a - 1$. On en déduit ainsi : $e^a = \frac{1}{a^2}$ et, finalement :

$$f(a) = e^a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$$

La fonction f admet un minimum m en a et ce minimum vaut $m = f(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.

Question e.

A la question 1.b., on a vu que l'on avait : $0,703 < a < 0,704$.

On en déduit : $\frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}$, $\frac{1}{0,704^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,703^2}$ et enfin :

$$\frac{1}{0,704} + \frac{1}{0,704^2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,703} + \frac{1}{0,703^2}$$

Or : $\frac{1}{0,704} + \frac{1}{0,704^2} \approx 3,438$ (valeur approchée à 10^{-3} par défaut) et $\frac{1}{0,703} + \frac{1}{0,703^2} \approx 3,446$ (valeur approchée à 10^{-3} par excès). On a donc :

$$3,43 < 3,438 < m < 3,446 < 3,45$$

Finalement, on a bien :

$$3,43 < m < 3,45$$

Complément

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, pour x « grand », on a $f(x) \approx e^x$. Par ailleurs, comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x = 1$, pour x

proche de 0, on a $f(x) \approx \frac{1}{x} + 1$.

Sur le graphique ci-dessous, on a ainsi fait apparaître les courbes représentatives des fonctions f (en bleu), exponentielle (en rouge) et $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$ (en vert).

