Pondichéry – Avril 2008 - QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.
Barème : une bonne réponse rapporte un point ; une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. Le prix d'un produit dérivé du pétrole a augmenté de 60%. Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix doit baisser de :

    - 70%
    - 60%
    - 40%
    - 37,5%

2. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B qui vérifient $p(\mathrm{A})=0,3$ et $p(\mathrm{B})=0,5$. On a alors :

    - $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,65$
    - $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,8$
    - $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,15$
    - Les données ne permettent pas de calculer $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

3. *f* est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\frac{1}{x}$.
    La courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal du plan admet pour asymptote la droite d'équation :

    - $y=0$
    - $y=2x-1$
    - $y=2$
    - $y=-x+1$

4. Le nombre $A = 2\ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right)$ est égal à :

- $1 + 4\ln 2$
- $4\ln 2 + 3$
- $2\ln 5 + 1$
- $8\ln 2$

Analyse

Quatre thèmes différents. Le premier correspond à un calcul du programme de 1ère tandis que les trois autres correspondent à des calculs ou détails de cours typique du programme de Terminale.

Résolution

→ *Question 1.*

Un calcul ultra-classique pour commencer !

Notons p_1 le prix initial. Dire que ce prix a augmenté de 60% équivaut à dire qu'il a été multiplié par $1+\frac{60}{100}=1,6=\frac{8}{5}$. Si nous notons p_2 le nouveau prix, nous avons donc :

$$p_2 = 1,6\,p_1 = \frac{8}{5}p_1$$

Nous souhaitons appliquer une réduction à p_2 pour pouvoir retrouver le prix p_1. Réduire le prix p_2 de t% équivaut à le multiplier par $1-\frac{t}{100}$. On veut donc : $\left(1-\frac{t}{100}\right)p_2 = p_1$.

C'est-à-dire : $\left(1-\frac{t}{100}\right)\frac{8}{5}p_1 = p_1$. Soit, finalement :

$$\left(1-\frac{t}{100}\right)\frac{8}{5}=1$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{t}{100}\right)\frac{8}{5}=1\\
&\Leftrightarrow 1-\frac{t}{100}=\frac{5}{8}\\
&\Leftrightarrow \frac{t}{100}=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}\\
&\Leftrightarrow t=\frac{300}{8}=\frac{75}{2}=37,5
\end{aligned}$$

La baisse cherchée doit donc être de 37,5%.

→ *Question 2.*

L'information clé de cet énoncé est l'indépendance des événements A et B. On a donc :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$$

Ici, nous obtenons : $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B}) = 0,3\times 0,5 = 0,15$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) &= p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \\ &= p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B}) \\ &= 0,3 + 0,5 - 0,15 \\ &= 0,65 \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 0,65}}$$

→ *Question 3.*

Avec $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, il vient immédiatement :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (2x-1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

On en déduit :

La courbe représentative de la fonction *f* admet en $+\infty$
une asymptote oblique d'équation : $y = 2x - 1$.

→ *Question 4.*

On utilise ici quelques-unes des propriétés fondamentales du logarithme népérien :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 2\ln\left(\frac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\frac{8}{e}\right) \\ &= 2(\ln e - \ln 4) + 5\ln 2 + \ln 8 - \ln e \\ &= 2\ln e - 2\ln 2^2 + 5\ln 2 + \ln 2^3 - \ln e \\ &= 2 - 2\times 2\ln 2 + 5\ln 2 + 3\ln 2 - 1 \\ &= 1 - 4\ln 2 + 8\ln 2 \\ &= 1 + 4\ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{A = 1 + 4\ln 2}}$$