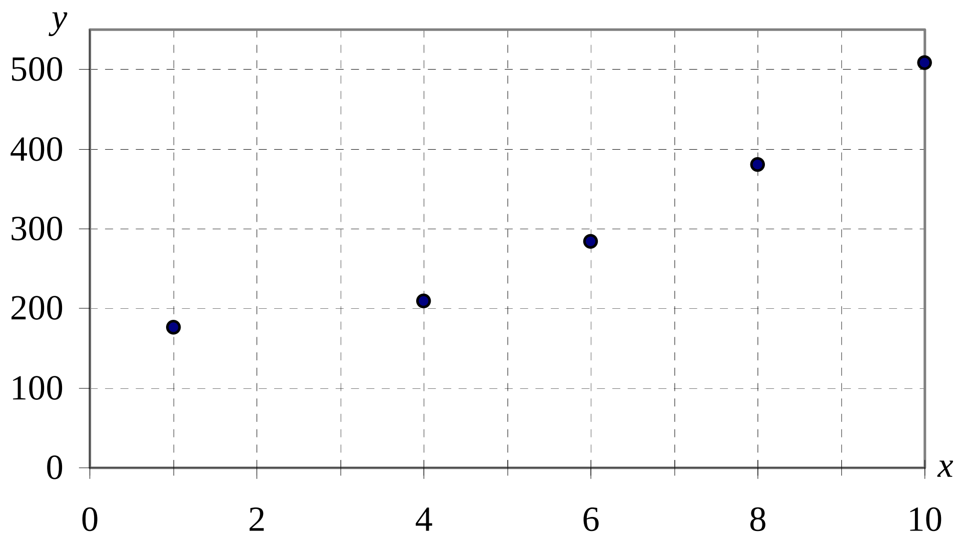
Amérique du Nord – Série ES – Juin 2005 - Exercice

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (C.A.), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
C.A. y_i	176	209	284	380	508

1. Le nuage de points $\mathrm{M}_i\left(x_i ; y_i\right)$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?



2. On pose $z_i = \ln y_i$.

a. Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i associées aux rangs x_i du tableau.

b. Construire le nuage de points $\mathrm{N}_i\left(x_i ; z_i\right)$ dans le repère orthogonal suivant :

- Sur l'axe des abscisses, on placera O à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année ;
- Sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.

3. a. Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près) et tracer la droite d dans le repère précédent.

b. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = A \times k^x$ (arrondir A à l'entier près et k à 10^{-2} près).

4. a. Tracer la droite d dans le même repère que celui du nuage de points $\left(\mathrm{N}_i\right)$.

b. Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.

c. A partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

Analyse

On a affaire ici à un exercice classique d'ajustement. L'ajustement affine n'étant pas le plus pertinent, on aboutit à un ajustement exponentiel après avoir introduit le logarithme népérien de la variable *y*. Les dernières questions visent à faire exploiter par l'élève le modèle obtenu (estimations).

Résolution

→ *Question 1.*

Au regard de la disposition des cinq points, on pourrait assez raisonnablement envisager un ajustement affine, non seulement parce que l'alignement semble correct, mais aussi parce que le nombre de points est faible.

Ceci dit, deux arguments plaident en faveur d'un autre type d'ajustement, plus acceptable que l'ajustement affine :

- Autant les points M_2, M_3, M_4 et M_5 pourraient justifier d'un ajustement affine, autant l'ajout de M_1 rend cette approche plus discutable ;
- Les pentes des droites (M_1M_2), (M_2M_3), (M_3M_4) et (M_4M_5) vont en augmentant.

→ *Question 2.a.*

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
C.A. y_i	176	209	284	380	508
$z_i = \ln y_i$	**5,17**	**5,34**	**5,65**	**5,94**	**6,23**

Les valeurs des z_i sont des valeurs arrondies à 10^{-2}.

→ *Question 2.b.*

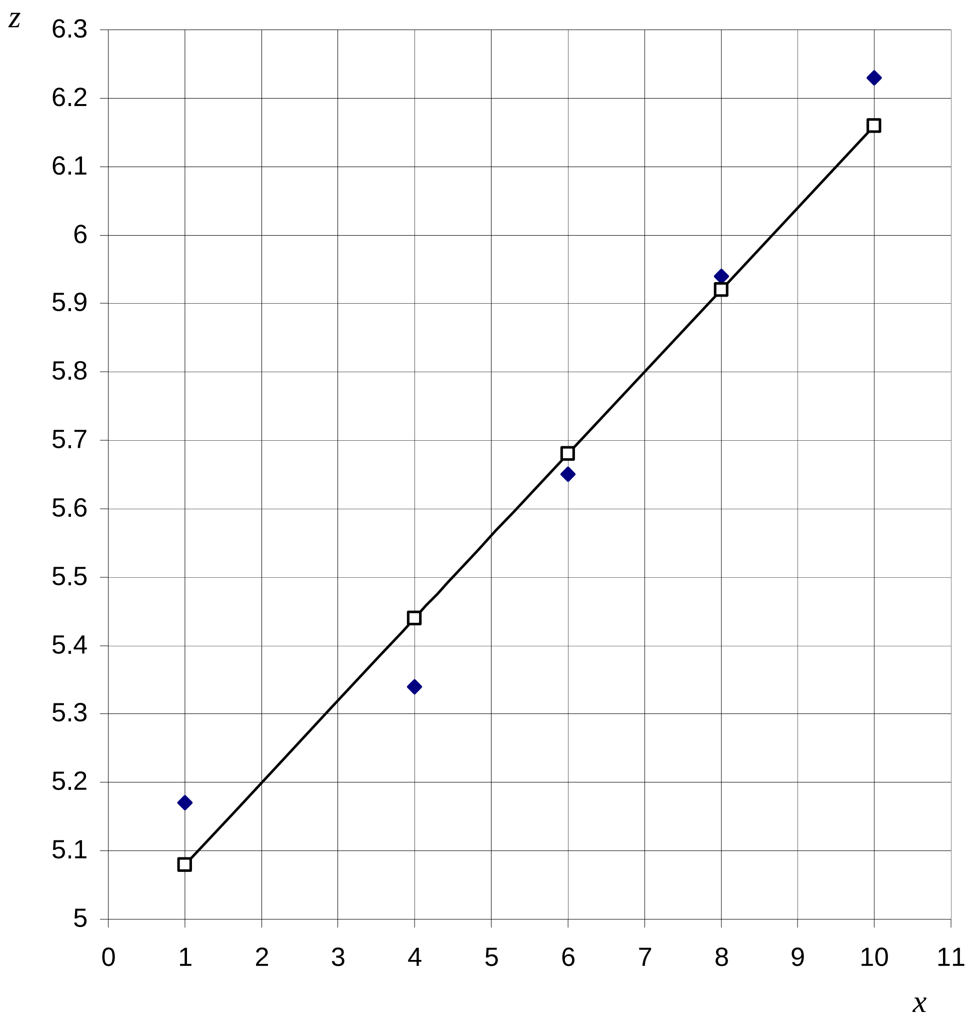
Pour la représentation graphique du nuage de points, voir ci-après.

→ *Question 3.a.*

A l'aide des valeurs z_i calculées à la question précédente on obtient avec la calculatrice l'équation suivante de la droite de régression de *z* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrées (les coefficients étant des valeurs arrondies à 10^{-2}) :

Une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés est (les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}) :
$$z = 0{,}12x + 4{,}96$$

On peut ainsi tracer la droite *d* dans le repère défini à la question 2.b.



→ *Question 3.b.*

Remplaçons *z* par $\ln y$ dans l'équation obtenue à la question précédente :

$$\ln y = 0,12x + 4,96$$

Considérons alors les exponentielles des membres de cette égalité :

$$\exp(\ln y) = \exp(0,12x + 4,96)$$

D'où :

$$y = \exp(0,12x + 4,96) = e^{4,96} \times e^{0,12x} = e^{4,96} \times \left(e^{0,12}\right)^x$$

On a bien *y* de la forme $y = A \times k^x$ avec $A = e^{4,96}$ et $k = e^{0,12}$.

En arrondissant A à l'unité et k à 10^{-2}, on obtient finalement :

$$\boldsymbol{y = 143 \times 1,13^x}$$

→ *Question 4.a.*

Voir le graphique ci-dessus.

→ *Question 4.b.*

L'année correspondant au rang 0 étant l'année 1993, l'année 2005 correspond au rang : $2005-1993$, c'est à dire au rang 12.

Le chiffre d'affaires estimé pour l'année 2005 à partir de la formule obtenue à la question 3.b. vaut donc : $y = 143 \times 1,13^{12}$.

La variable y exprimant le chiffre d'affaires en millions d'euros, on obtiendra une valeur approchée au millier d'euros en donnant une valeur de y arrondie à 10^{-3}.

On obtient : $143 \times 1,13^{12} \simeq 619,837$ à 10^{-3} près.

En 2005, la valeur estimée du chiffre d'affaires arrondie au millier d'euros est de 619 837 euros.

→ *Question 4.c.*

Soit x le rang de l'année cherchée.

Un milliard d'euros correspondant à mille millions d'euros, il convient ici de résoudre l'inéquation :

$$143 \times 1,13^x \geq 1000$$

Il vient :

$$1,13^x \geq \frac{1000}{143}$$

Les membres de cette inéquation étant strictement positifs, on peut en considérer les logarithmes népériens, rangés dans le même ordre :

$$x \ln 1,13 \geq \ln\left(\frac{1000}{143}\right)$$

Comme, $1{,}13>1$, on a $\ln 1{,}13>0$, d'où :

$$x \geq \frac{\ln\left(\frac{1000}{143}\right)}{\ln 1{,}13}$$

On a : $\frac{\ln\left(\frac{1000}{143}\right)}{\ln 1{,}13} \simeq 15{,}91$ à 10^{-2} près.

On en déduit que le rang de l'année cherchée vaut 16 (plus petit entier supérieur à 15,91).

L'année correspondante est : $1993+16=2009$.

Le chiffre d'affaires sera supérieur à un milliard d'euros à partir de l'année 2009.