France Métropolitaine – Série ES – Juin 2003 - Exercice

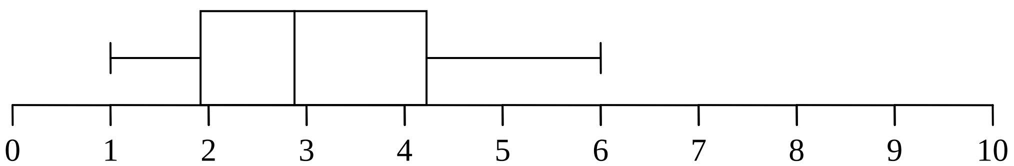
Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.
Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

Jour de la semaine	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
Rang *i* du jour	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ».
On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\frac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.

On pose $d_{obs}^2 = \sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \frac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i-ème jour.

1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.
2. Calculer alors la valeur de $1000d_{obs}^2$ (la multiplication par 1000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).
3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2 000 séries de 250 retraits hebdomadaires.
Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1000d_{obs}^2$ correspondant. On a obtenu ainsi 2 000 valeurs de $1000d_{obs}^2$.
Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.



Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.

4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

Analyse

On a affaire ici à un exercice classique de test d'adéquation à une loi équirépartie. Le sujet peut s'avérer un peu déroutant en ce sens que l'on ne travaille pas avec la quantité $250d_{obs}^2$ comme on aurait pu s'y attendre (ici $n = 250$) mais avec $1000d_{obs}^2$. Le facteur multiplicatif (4) ainsi introduit ne change pas grand'chose à la démarche et permet, comme mentionné dans l'énoncé, une meilleure lisibilité des résultats numériques.

Résolution

→ *Question 1.*

Les fréquences de retrait s'obtiennent en divisant chacun des cinq effectifs (37, 55, 45, 53 et 60) par l'effectif total (250).

On peut alors fournir le tableau suivant :

Jour de la semaine	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
Rang *i* du jour	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60
Fréquence des retraits	**0.148**	**0.22**	**0.18**	**0.212**	**0.24**

→ *Question 2.*

A partir des résultats obtenus à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
1000d_{obs}^2 &= 1000\sum_{i=1}^{5}\left(f_i-\frac{1}{5}\right)^2\\
&=1000\left(\left(f_1-\frac{1}{5}\right)^2+\left(f_2-\frac{1}{5}\right)^2+\left(f_3-\frac{1}{5}\right)^2+\left(f_4-\frac{1}{5}\right)^2+\left(f_5-\frac{1}{5}\right)^2\right)\\
&=1000\left(\left(0,148-\frac{1}{5}\right)^2+\left(0,22-\frac{1}{5}\right)^2+\left(0,18-\frac{1}{5}\right)^2+\left(0,212-\frac{1}{5}\right)^2+\left(0,24-\frac{1}{5}\right)^2\right)\\
&=1000\left(0,002704+0,0004+0,0004+0,000144+0,0016\right)\\
&=1000\times 0,005248\\
&=\boxed{5,248}
\end{aligned}$$

Pour la série observée, on a : $1000d_{obs}^2 = 5,248$

→ *Question 3.*

L'extrémité de la « patte » de droite correspond à une valeur de 6 environ.

Le 9ème décile des 2000 valeurs de $1000d_{obs}^2$ obtenues par simulation vaut environ 6.

→ *Question 4.*

La simulation de 2000 séries de 250 retraits en supposant l'équiprobabilité des retraits journaliers permet d'approcher la distribution théorique des valeurs pouvant être prises par la quantité $1000d_{obs}^2$.

Le diagramme en boîte fourni nous permet d'établir que 90% de ces valeurs sont inférieures à 6.

Ainsi, si nous effectuons une simulation en supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers et si nous calculons la quantité $1000d_{obs}^2$, il y aura une probabilité de 0,9 que la valeur obtenue soit inférieure à 6.

C'est la base de notre test : pour la série observée, cette fois, nous avons calculé (voir la question 2) : $1000d_{obs}^2 = 5,248$. La probabilité d'obtenir une valeur inférieure à 6, comme c'est le cas ici, dans l'hypothèse de l'équiprobabilité des retraits journaliers, vaut 0,9. On peut donc conclure :

L'hypothèse que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine »
(i.e. équiprobabilité des retraits journaliers)
est donc vérifiée avec un risque d'erreur de 10%.