

Pondichéry – Avril 2012 – Série ES – Exercice

Anna a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

1.
 - a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour une semaine sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 visiteurs sur l'axe des ordonnées.
 - b. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points, et le placer dans le repère précédent (on arrondira l'ordonnée du point G à l'unité près).
2.
 - a. Pour cette question, les calculs pourront être effectués à l'aide de la calculatrice ; aucun détail n'est exigé à leur propos.
Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'entier le plus proche.
 - b. Tracer la droite (D) dans le repère précédent.
 - c. En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine suivant la création du site.
3. En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement du type « logarithmique ».
Pour cela, on pose $z = \ln(x)$.
 - a. On donne le tableau suivant :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693		1,386	1,609		1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

Préciser les valeurs manquantes z_3 et z_6 en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation de la droite (d) d'ajustement affine de y en z , obtenues par la méthode des moindres carrés, est :
 $y = 133z + 184$.

En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la dixième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).

c. A l'aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 600.

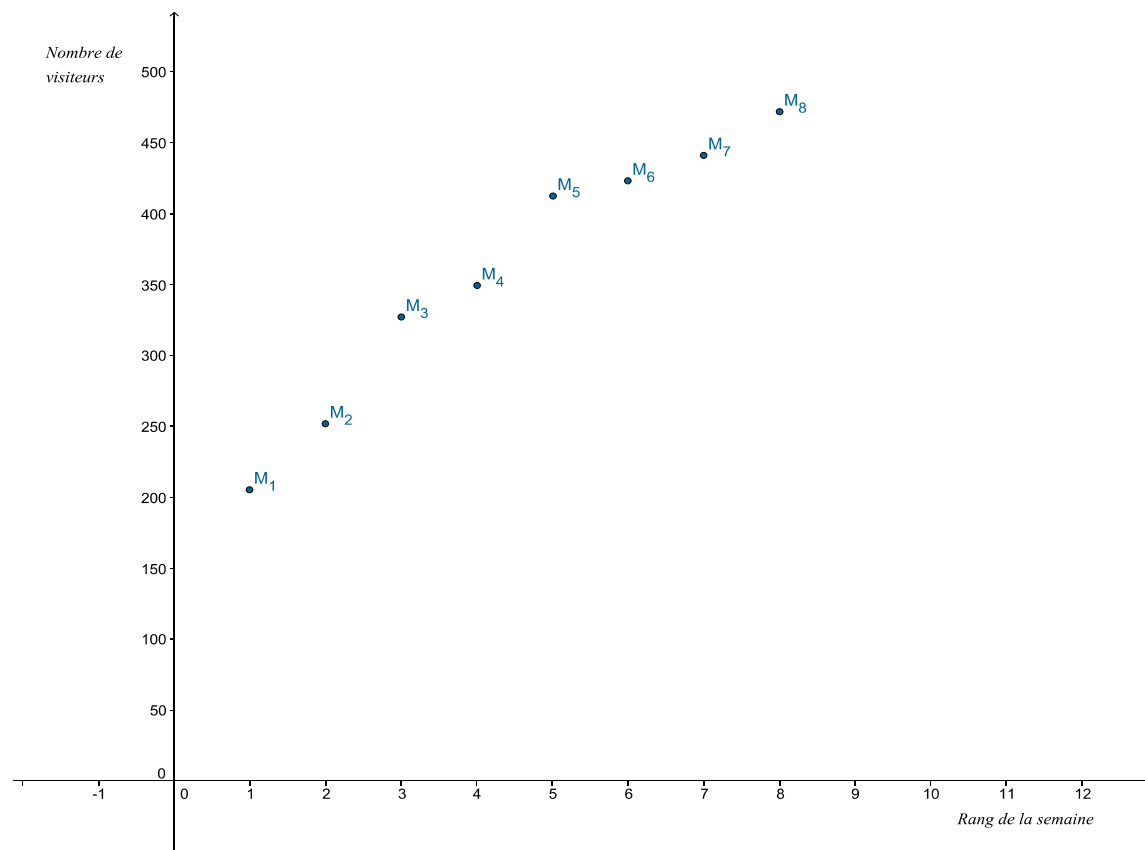
Analyse

Un exercice d'ajustement classique où deux ajustements sont étudiés et exploités : un ajustement affine et un ajustement logarithmique.

Résolution

Question 1.a.

On obtient facilement :



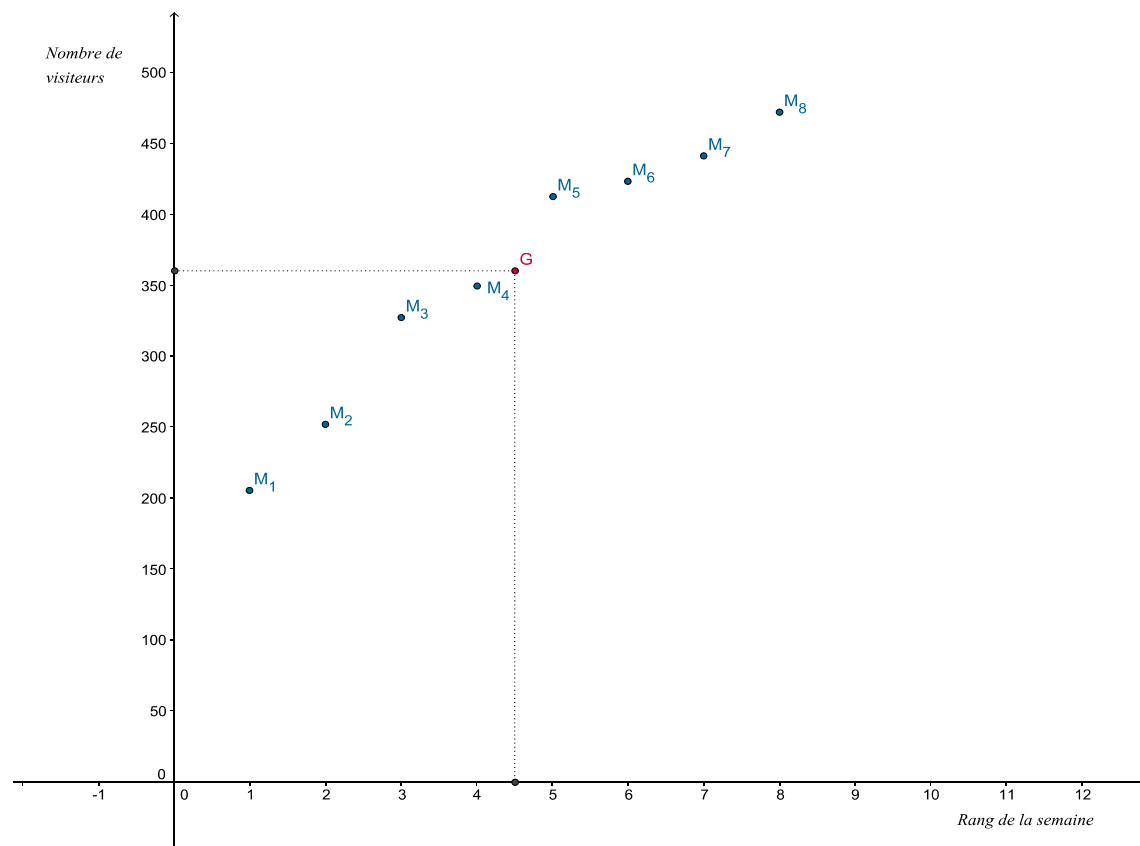
Question 1.b.

Le point moyen G admet pour coordonnées les moyennes arithmétiques des séries (x_i) et (y_i) , soit :

$$x_G = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4,5$$
$$y_G = \frac{205+252+327+349+412+423+441+472}{8} = \frac{2881}{8} \approx 360$$

Le point moyen G admet pour coordonnées (4,5 ; 360)
(l'ordonnée ayant été arrondie à l'unité)

D'où le nouveau graphique :



Question 2.a.

A l'aide de la calculatrice, on obtient la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

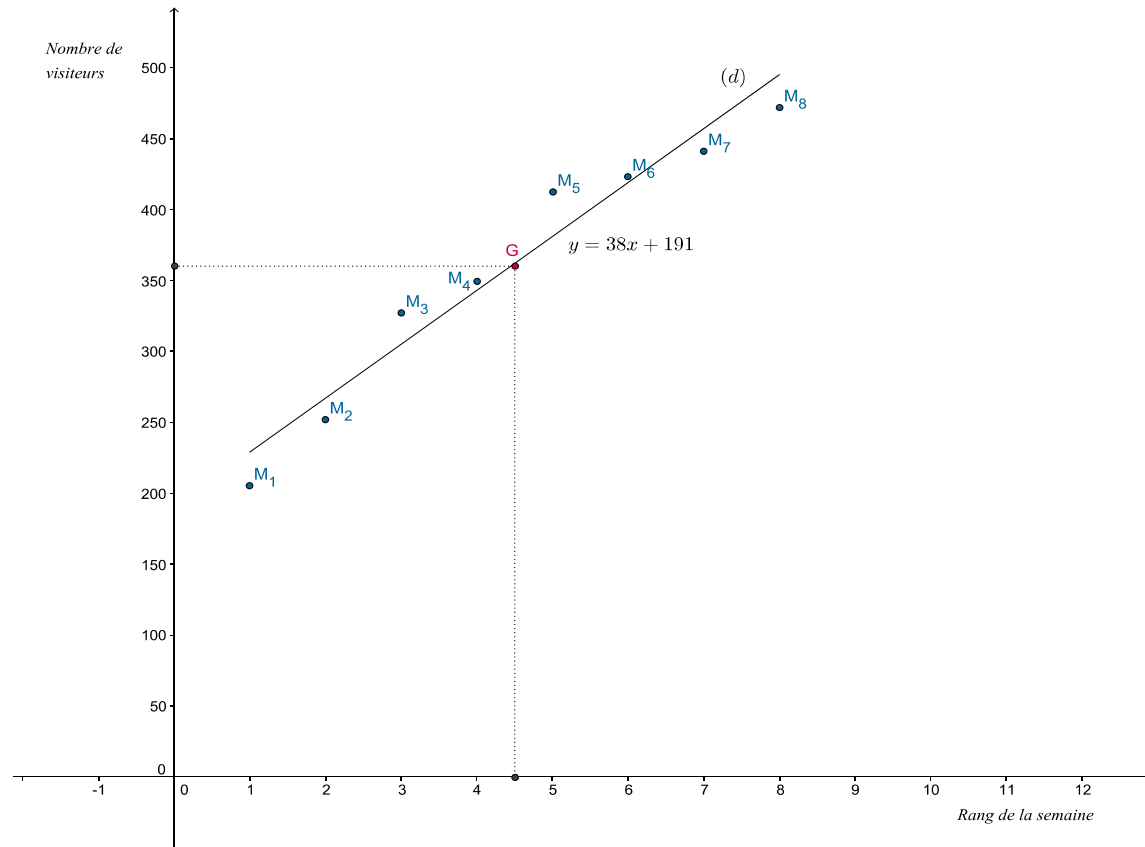
L'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est :

$$y = 38x + 191$$

(les coefficients ont été arrondis à l'entier le plus proche)

Question 2.b.

On obtient le nouveau graphique :



Question 2.c.

La dixième semaine correspond à $x_{10} = 10$. En utilisant alors l'ajustement précédent, il vient immédiatement : $y = 38x_{10} + 191 = 38 \times 10 + 191 = 380 + 191 = 571$.

On peut estimer le nombre de visiteurs du site la 10^{ème} semaine à 571.

Question 3.a.

On a :

$$z_3 = \ln(x_3) = \ln 3 \approx 1,099 \text{ et } z_6 = \ln(x_6) = \ln 6 \approx 1,792$$

D'où le tableau complet :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792	1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

Question 3.b.

En utilisant le deuxième ajustement, on obtient :

$$y = 133z_{10} + 184 = 133 \ln(x_{10}) + 184 = 133 \ln 10 + 184 \approx 490$$

A l'aide de l'ajustement logarithmique, on peut estimer le nombre de visiteurs du site la 10^{ème} semaine à 490.

Question 3.c.

On cherche à résoudre ici : $y = 133z_i + 184 \geq 600$.

$$\text{On a : } 133z_i + 184 \geq 600 \Leftrightarrow 133 \ln(x_i) \geq 416 \Leftrightarrow \ln i \geq \frac{416}{133} \Leftrightarrow i \geq \exp\left(\frac{416}{133}\right).$$

Comme : $\exp\left(\frac{416}{133}\right) \approx 22,8$ on en déduit que plus de 600 visiteurs auront été comptabilisés pour la première fois la 23^{ème} semaine.

A titre de vérification :

$$133 \ln 22 + 184 \approx 595$$

$$133 \ln 23 + 184 \approx 601$$

Plus de 600 visiteurs auront été comptabilisés pour la première fois la 23^{ème} semaine.