

Centres étrangers – Juin 2011 – Série ES – Exercice

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre d'internautes en Chine de 2002 à 2009. Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 2000.

| Année | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Rang de l'année x_i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Nombre d'internautes y_i (en millions) | 60 | 70 | 95 | 100 | 140 | 160 | 250 | 385 |

On cherche à étudier l'évolution du nombre d'internautes en fonction du rang x de l'année.

1. Calculer le taux d'évolution de ce nombre d'internautes entre 2002 et 2009. On donnera le résultat à 0,1 près.
2. Représenter sur votre copie le nuage de points $M(x_i; y_i)$ associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques :
 - Sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 1 an ;
 - Sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 20 millions d'internautes (en plaçant 50 à l'origine).
3. On cherche dans un premier temps un ajustement affine.
 - a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients arrondis à l'unité). Tracer cette droite sur le graphique précédent.
 - b. En supposant que cet ajustement reste valable pour l'année suivante, donner une estimation, arrondie au million, du nombre d'internautes en Chine en 2010.

4. Une étude récente a montré qu'au 1er mai 2010, on a dépassé les 400 millions d'internautes en Chine. On envisage donc un ajustement exponentiel et on pose $z = \ln(y)$.

a. Recopier et compléter le tableau en arrondissant les valeurs de z_i au millième :

| | | | | | | | | |
|------------------|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| x_i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | 4,094 | | | | | | | |

b. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients arrondis au millième).

c. En déduire une expression de y en fonction de x .

d. En prenant l'approximation $y \approx 32,5 \times e^{0,253x}$ en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation, arrondie au million, du nombre d'internautes en 2012.

Analyse

Un ajustement affine, peu convaincant, suivi d'un ajustement exponentiel, chacun étant utilisé pour effectuer une extrapolation. L'exercice requiert une bonne (mais classique !) maîtrise de la calculatrice !

Résolution

Question 1.

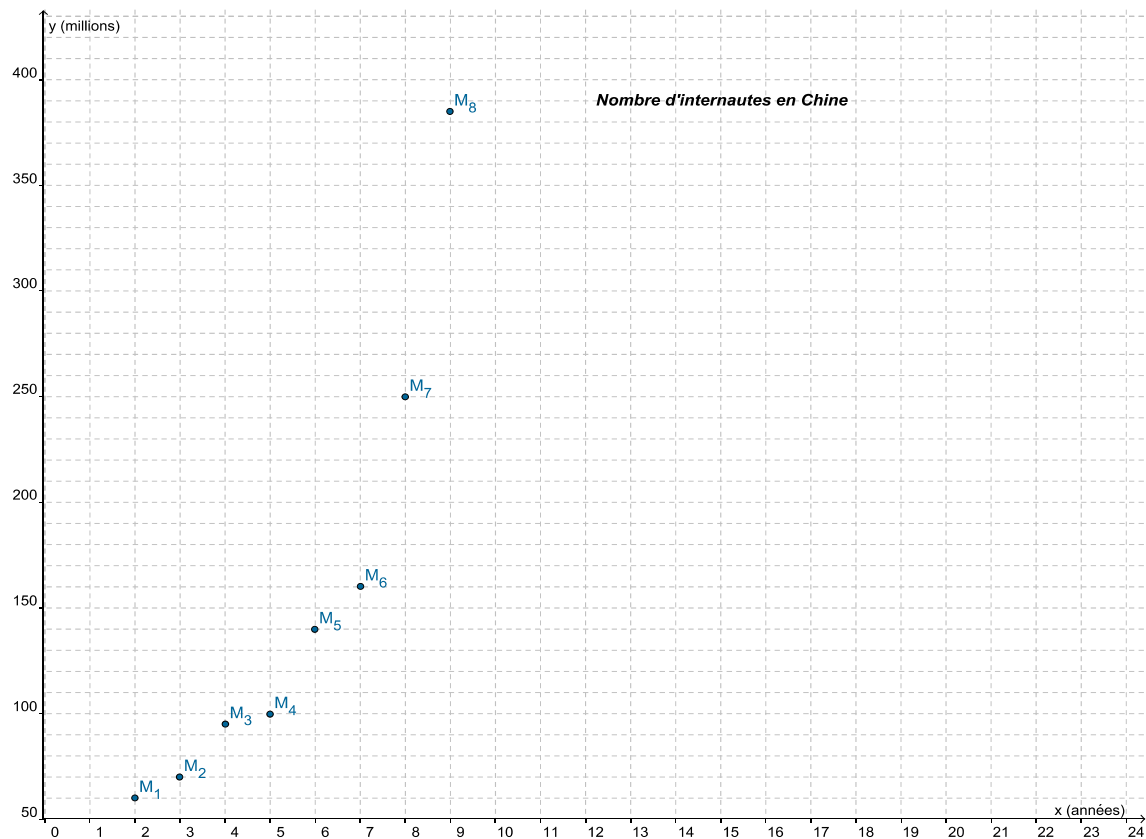
Le taux d'évolution du nombre d'internautes entre 2002 (60 millions) et 2009 (385 millions) est donnée par :

$$\frac{385 - 60}{60} = \frac{325}{60} = \frac{65}{12} \approx 5,4$$

Le taux d'évolution du nombre d'internautes entre 2002 et 2009 est environ égal à 5,4.

Question 2.

On obtient :



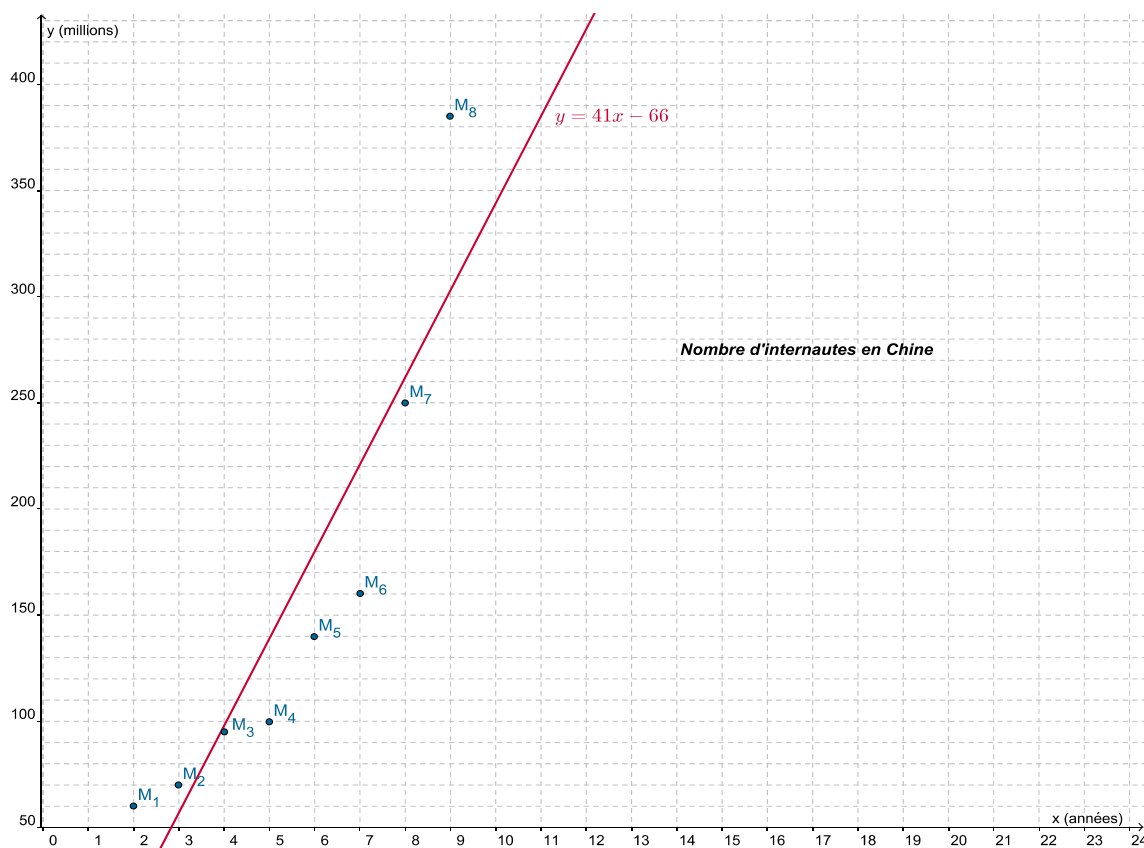
Question 3.a.

En procédant à la calculatrice à un ajustement affine, on obtient par la méthode des moindres carrés l'équation suivante pour la droite de régression de y en x (les coefficients ayant été arrondis à l'unité) : $y = 41x - 66$.

Une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est (coefficients arrondis à l'unité) :

$$y = 41x - 66$$

On obtient alors :



Question 3.b.

L'année 2010 correspond au rang $2010 - 2000 = 10$. En admettant que le modèle précédent reste valable en 2010, le nombre d'internautes en Chine serait alors environ égal à :

$$y = 41 \times 10 - 66 = 410 - 66 = 344$$

En supposant que l'ajustement affine obtenu précédemment reste valable en 2010, on peut estimer le nombre d'internautes en Chine en 2010 à 344 millions environ.

Question 4.a.

On obtient :

| | | | | | | | | |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $z_i = \ln y_i$ | 4,094 | 4,248 | 4,554 | 4,605 | 4,942 | 5,075 | 5,521 | 5,953 |

Question 4.b.

En procédant à la calculatrice à un ajustement affine, on obtient par la méthode des moindres carrés l'équation suivante pour la droite de régression de z en x (les coefficients ayant été arrondis au millièm) : $z = 0,253x + 3,481$.

Une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés est (coefficients arrondis à l'unité) :

$$z = 0,253x + 3,481$$

Question 4.c.

Comme $z = \ln y$, on a :

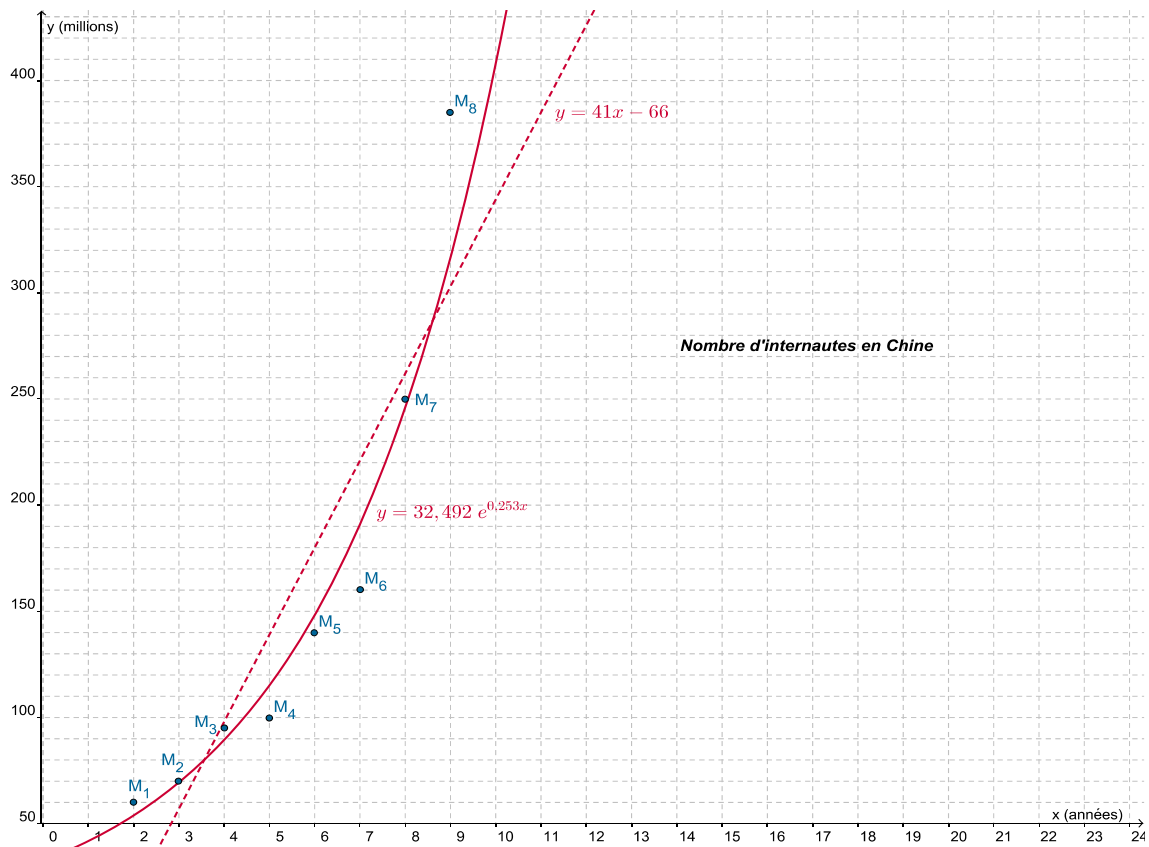
$$\begin{aligned}z &= 0,253x + 3,481 \\ \Leftrightarrow \ln y &= 0,253x + 3,481 \\ \Leftrightarrow e^{\ln y} &= e^{0,253x + 3,481} \\ \Leftrightarrow y &= e^{3,481} \times e^{0,253x}\end{aligned}$$

Comme $e^{3,481} \approx 32,492$ on a finalement : $y \approx 32,492 \times e^{0,253x}$.

A partir de l'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés, on peut donner la relation approchée suivante entre y et x (coefficients arrondis au millièm) :

$$y \approx 32,492 \times e^{0,253x}$$

A titre de complément, nous avons fait apparaître sur le graphique précédent la courbe (en rouge plein) d'équation $y \approx 32,492 \times e^{0,253x}$.



Question 4.d.

L'année 2012 correspond au rang $2012 - 2000 = 12$. Avec l'approximation $y \approx 32,5 \times e^{0,253x}$, le nombre d'internautes en Chine en 2012 serait alors environ égal à (valeur de y arrondie à l'unité) : $y \approx 32,5 \times e^{0,253 \times 12} \approx 677$.

En supposant que l'approximation $y \approx 32,5 \times e^{0,253x}$ reste valable dans les années qui suivent, on peut estimer le nombre d'internautes en Chine en 2012 à 677 millions environ.