

**Partie A**

Soient, dans l'espace  $E$ , quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  distincts deux à deux.

1. Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme si, et seulement si,  $D$  est le barycentre du système  $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$ .

2. On suppose que  $ABCD$  est un parallélogramme.

Déterminer l'ensemble  $(S)$  des points  $M$  de l'espace  $E$  tels que :

$$\|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\| = BD$$

3. On suppose maintenant que  $ABCD$  est un rectangle.

Déterminer l'ensemble  $(\Sigma)$  des points  $M$  de l'espace  $E$  tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$$

**Partie B**

On considère dans l'espace  $E$  deux parallélogrammes  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  ainsi que les milieux  $I$ ,  $J$ ,  $K$  et  $L$  de  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$  et  $[DD']$  respectivement.

1. Montrer que  $L$  est barycentre des points  $I$ ,  $J$  et  $K$  affectés de coefficients que l'on précisera. En déduire que  $IJKL$  est un parallélogramme.

2. Soient  $O$ ,  $Q$  et  $P$  les centres respectifs des parallélogrammes  $IJKL$ ,  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$ .

Montrer que  $O$  est le milieu de  $[PQ]$ .

---

## Analyse

Cet exercice permet d'établir le lien existant entre les notions de parallélogramme et de barycentre.

Les manipulations étant essentiellement vectorielles, on se place dans l'espace sans que cela entraîne de difficulté particulière. Bien que cela ne soit pas demandé, une ou plusieurs figures peuvent être utiles pour transformer les égalités vectorielles servant de points de départ aux démonstrations.

---

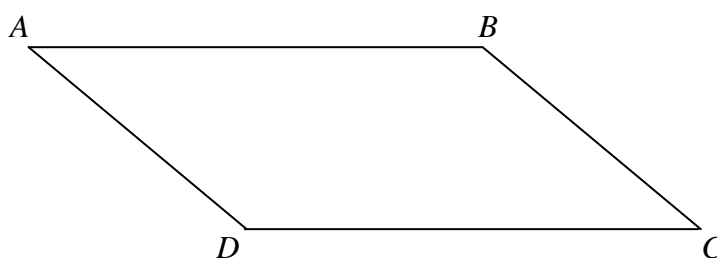
## Résolution

### Partie A

#### → Question 1.

A l'aide des vecteurs, on a (voir figure) l'équivalence classique :

$$ABCD \text{ parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad (1)$$



Comme on souhaite mettre en évidence le point  $D$  en tant que barycentre du système  $\{(A,1), (B,-1), (C,1)\}$ , nous allons transformer l'égalité vectorielle apparaissant dans l'équivalence (1) pour faire apparaître le point  $D$  dans chaque vecteur :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Cette dernière égalité traduit bien le fait que le point  $D$  est le barycentre du système  $\{(A,1), (B,-1), (C,1)\}$ .

Puisque nous avons raisonné par équivalence, nous pouvons finalement écrire :

$ABCD \text{ parallélogramme} \Leftrightarrow D \text{ est le barycentre du système } \{(A,1), (B,-1), (C,1)\}$

→ Question 2.

On suppose que  $ABCD$  est un parallélogramme.

D'après la question précédente, on dispose donc de l'égalité vectorielle :  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

On peut alors récrire l'égalité que doit vérifier tout point  $M$  de (S) en faisant apparaître le point  $D$  :

$$\begin{aligned} & \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD \\ \Leftrightarrow & \left\| (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}) - (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) \right\| = BD \\ \Leftrightarrow & \left\| \overrightarrow{MD} + \underbrace{(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})}_{=\vec{0}} \right\| = BD \\ \Leftrightarrow & \boxed{\|\overrightarrow{MD}\| = BD} \end{aligned}$$

La dernière égalité nous permet de conclure que (S) est l'ensemble des points dont la distance au point  $D$  est constante, égale à  $BD$ . (S) est donc la sphère de centre  $D$  et de rayon  $BD$ .

**(S) est la sphère de centre  $D$  et de rayon  $BD$ .**

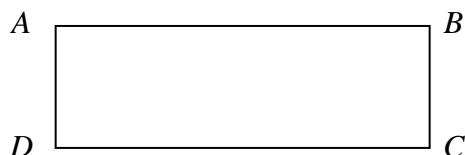
→ Question 3.

Dans cette question, on suppose que  $ABCD$  est un rectangle.

L'égalité que doit vérifier tout point de l'ensemble ( $\Sigma$ ) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} & MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2 \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = BD^2 \\ \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2 = BD^2 \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 = BD^2 \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{MD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 = BD^2 \quad (E) \end{aligned}$$

Une figure peut être utile pour continuer à simplifier l'égalité obtenue :



Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire :  $DA^2 + AB^2 = BD^2$ . Or,  $AB = DC$ , on a donc :  $DA^2 + DC^2 = BD^2$ . Soit, en utilisant une notation vectorielle :  $\overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{DB}^2$ .

L'égalité (E) ci-dessus se réécrit donc finalement :

$$\begin{aligned} \overline{MD}^2 + \overline{DA}^2 - \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 &= BD^2 \\ \Leftrightarrow \overline{MD}^2 &= BD^2 \\ \Leftrightarrow MD^2 &= BD^2 \\ \Leftrightarrow \boxed{MD = BD} \end{aligned}$$

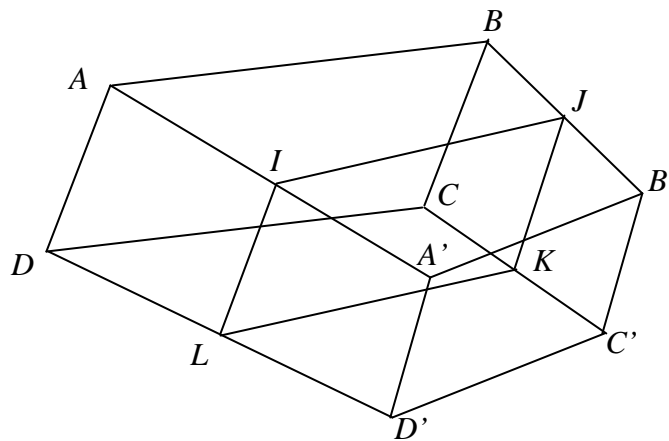
( $\Sigma$ ) est donc l'ensemble des points  $M$  de l'espace  $E$  situés à la distance  $BD$  du point  $D$ . Il s'agit donc du même ensemble que (S).

$$(\Sigma) = (S)$$

## Partie B

### → Question 1.

Une figure peut nous aider à clarifier quelque peu la situation envisagée (voir ci-dessous).



Puisque  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  sont deux parallélogrammes, on a, d'après la première question de la partie A, les deux égalités vectorielles :

$$\begin{aligned} \overline{DA} - \overline{DB} + \overline{DC} &= \vec{0} \\ \overline{D'A'} - \overline{D'B'} + \overline{D'C'} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Nous allons les réécrire en introduisant les points  $I, J, K$  et  $L$ .

On a d'abord :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{KC} + (\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{LK})} &= \vec{0} \quad (1)\end{aligned}$$

En procédant de façon analogue, on obtient également :

$$\boxed{\overrightarrow{D'L} + \overrightarrow{IA'} - \overrightarrow{JB'} + \overrightarrow{KC'} + (\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{LK})} = \vec{0} \quad (2)$$

En additionnant alors membre à membre les égalités (1) et (2), et en regroupant les termes afin de pouvoir tirer parti de la définition des points  $I, J, K$  et  $L$ , il vient :

$$(\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{D'L}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'}) - (\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JB'}) + (\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'}) + 2(\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{LK}) = \vec{0}$$

Comme les points  $I, J, K$  et  $L$ , sont les milieux respectifs des segments  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$  et  $[DD']$ , on a :

$$\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{D'L} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JB'} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'} = \vec{0}$$

Il vient alors :  $2(\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{LK}) = \vec{0}$ . Soit, finalement :

$$\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{LK} = \vec{0}$$

En d'autres termes :

**Le point  $L$  est le barycentre du système  $\{(I, 1), (J, -1), (K, 1)\}$ .**

D'après la première question de la partie A, on en déduit finalement :

**$IJKL$  est un parallélogramme.**

→ *Question 2.*

Pour montrer que  $O$  est le milieu du segment  $[PQ]$  nous pouvons, par exemple, considérer la somme :  $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$ . En utilisant le fait que  $O$  est le milieu de  $[LJ]$ , diagonale du parallélogramme  $IJKL$ , nous pouvons écrire ( $L$  étant le milieu du segment  $[DD']$ ) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} &= (\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DQ}) + (\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LD'} + \overrightarrow{D'P}) \\ &= 2\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{D'P}\end{aligned}$$

Mais on a aussi ( $J$  étant le milieu du segment  $[BB']$ ). :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} &= (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BQ}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JB'} + \overrightarrow{B'P}) \\ &= 2\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{B'P}\end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}) &= (2\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{D'P}) + (2\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{B'P}) \\ &= 2(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{BQ}) + (\overrightarrow{D'P} + \overrightarrow{B'P})\end{aligned}$$

Comme  $O$  est le milieu de  $[LJ]$ ,  $Q$  le milieu de  $[DB]$  et  $P$  le milieu de  $[D'B']$ , on a :  
 $\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{D'P} + \overrightarrow{B'P} = \vec{0}$ .

Il vient donc, finalement :  $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$ .

En d'autres termes :

**$O$  est le milieu de  $[PQ]$ .**