

Asie – Série ES – Juin 2005 - Exercice

Pour fabriquer un alliage, une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x; y) = 2x + 0,5y^2 + 4$$

- La figure 1 représente la surface d'équation $z = C(x; y)$ pour $0 \leq x \leq 20$ et $0 \leq y \leq 12$.

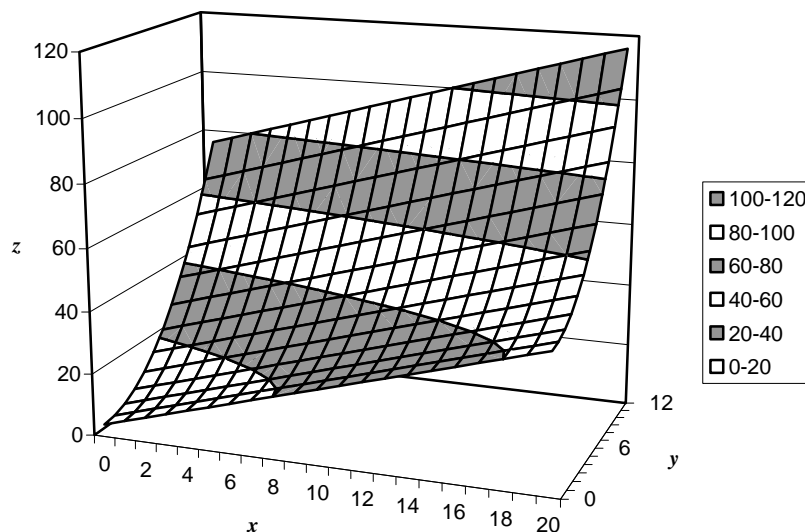


Figure 1

- La figure 2 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant de 20 en 20.

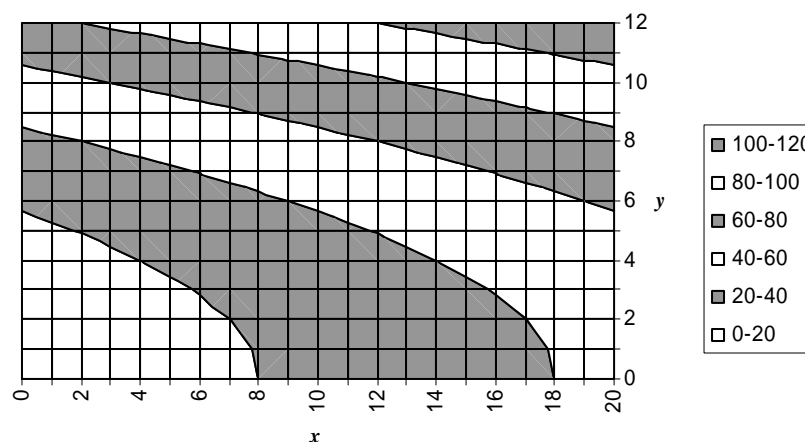


Figure 2

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de deux questions, chacune comportant quatre propositions de réponse dont une seule est exacte.

Une bonne réponse rapportera 0,5 point.

Une mauvaise réponse sera pénalisée 0,25 point.

Si le total des points de cette partie est négatif, la note attribuée sera 0.

Les réponses seront indiquées sur la copie. Aucune justification n'est demandée.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x; y)$?
 - a. M(13;9;60)
 - b. N(12;4;40)
 - c. R(12;8;60)
 - d. S(15;4;40)
2. La courbe de niveau $z = 20$ est :
 - a. une parabole
 - b. une droite
 - c. une hyperbole
 - d. autre réponse

Partie B

Les métaux A et B sont achetés respectivement 0,5 et 1 millier d'euros la tonne. L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

1. Un exemple

Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ? [0,5 pt]

2. Cas général

Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal B achetées : montrer que x et y sont liés par la relation $x + 2y = 22$. [1 pt]

3. a. Tracer sur la figure 2 ci-avant l'ensemble des points dont l'équation est :

$$x + 2y = 22 \quad [1 \text{ pt}]$$

b. En déduire graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros et les quantités correspondantes de métaux A et B achetées. [1,5 pt]

Analyse

On a affaire ici à un exercice classique de géométrie dans l'espace appliquée à un problème économique de minimisation de coût sous contrainte (ici celle du montant de l'investissement). Si les deux premières questions de la partie B ne pose pas de difficulté particulière, la troisième requiert de savoir interpréter un graphique fournissant une famille de courbes de niveau.

Résolution

Partie A

→ *Question 1.*

Les coordonnées du point doivent vérifier l'équation : $z = 2x + 0,5y^2 + 4$.

Pour chaque point, on peut donc calculer la quantité : $2x + 0,5y^2 + 4 - z$.

- Pour le point M : $2 \times 13 + 0,5 \times 9^2 + 4 - 60 = 26 + 40,5 + 4 - 56 = 14,5 \neq 0$;
- Pour le point N : $2 \times 12 + 0,5 \times 4^2 + 4 - 40 = 24 + 8 + 4 - 40 = -4 \neq 0$;
- Pour le point R : $2 \times 12 + 0,5 \times 8^2 + 4 - 60 = 24 + 32 + 4 - 60 = \boxed{0}$; (on peut éventuellement s'arrêter ici dans le cadre d'un QCM mais le dernier calcul permet d'être certain de son fait !)
- Pour le point S : $2 \times 15 + 0,5 \times 4^2 + 4 - 40 = 30 + 8 + 4 - 40 = 2 \neq 0$.

Le seul point, parmi les points proposés, appartenant à la surface d'équation $z = C(x; y)$ est le point R.

→ *Question 2.*

La courbe de niveau $z = 20$ admet pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} z = 20 \\ 2x + 0,5y^2 + 4 = 20 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} z = 20 \\ x = -0,25y^2 + 8 \end{cases}$$

On reconnaît dans la deuxième équation celle d'une parabole.

La courbe de niveau $z = 20$ est une parabole.

Partie B

→ Question 1.

Soit y le nombre de tonnes de métal B achetées par l'entreprise.

Une tonne de métal B étant achetées 1 milliers d'euros, l'entreprise va donc payer y milliers d'euros pour le métal B.

Une tonne de métal A étant achetée 0,5 milliers d'euros, l'entreprise va donc payer 2 milliers d'euros pour 4 tonnes de métal A.

Finalement, le montant total payé s'élève à $y + 2$ milliers d'euros.

Or, la dépense totale s'élève à 11 milliers d'euros. On en tire l'équation : $y + 2 = 11$.

Il vient alors : $y = 11 - 2 = 9$.

Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, elle achètera également 9 tonnes de métal B.

→ Question 2.

On raisonne comme précédemment avec, cette fois :

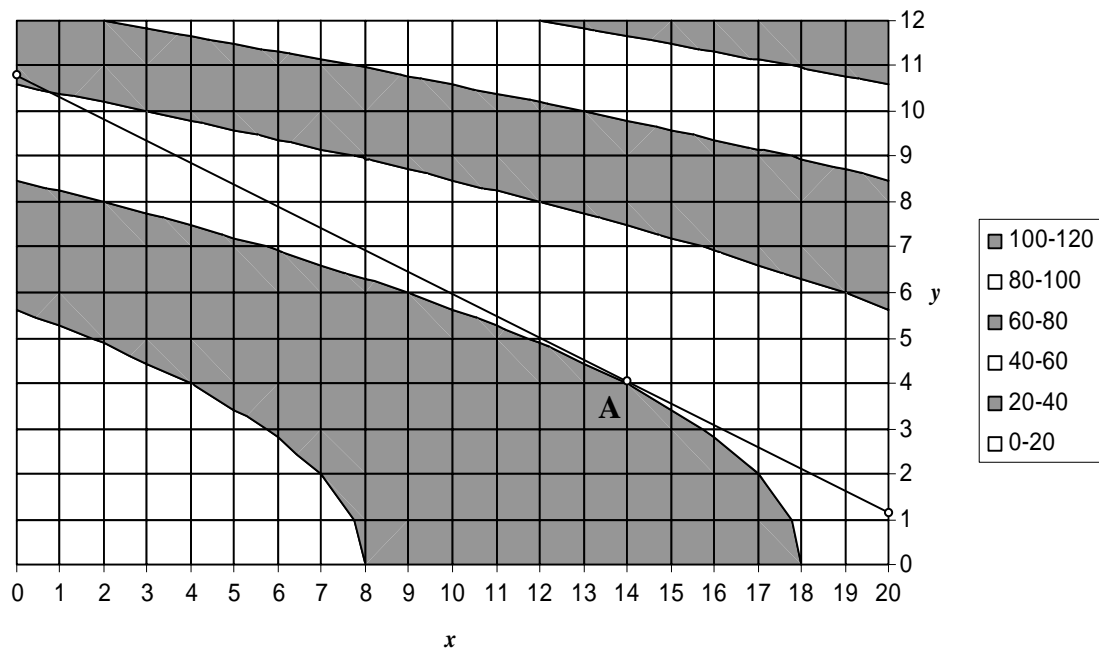
- x tonnes de métal A. L'entreprise dépensera alors $0,5x$ milliers d'euros ;
- y tonnes de métal B. L'entreprise dépensera alors y milliers d'euros.

La dépense totale s'élevant à 11 milliers d'euros, on a donc : $0,5x + y = 11$; soit, en multipliant chaque membre de l'équation par 2 : $x + 2y = 22$.

x désignant le nombre de tonnes de métal A et y le nombre de tonnes de métal B achetées par l'entreprise, on : $x + 2y = 22$.

→ Question 3.a.

Pour représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation $x + 2y = 22$, on utilise les points de coordonnées $(0;11)$ et $(20;1)$ (correspondant aux valeurs minimale et maximale de x). On obtient un segment (voir figure ci-après).



→ *Question 3.b.*

Considérer toutes les productions correspondant à un investissement de 11 milliers d'euros, c'est considérer tous les couples $(x; y)$ vérifiant : $x + 2y = 11$, c'est à dire, graphiquement parlant, le segment obtenu à la question précédente.

Pour obtenir un coût de production minimum, on cherche alors sur ce segment un point de tangence à une courbe de niveau (courbe d'isocoût). On obtient (voir figure ci-dessus) le point $A(14; 4)$.

Le coût correspondant s'élève alors à : $C(14; 4) = 2 \times 14 + 0,5 \times 4^2 + 4 = 28 + 8 + 12 = 40$. C'est à dire 40 milliers d'euros.

Pour un investissement total de 11 milliers d'euros, l'entreprise obtiendra un coût de production minimum (s'élevant à 40 milliers d'euros) si elle achète 14 tonnes du métal A et 4 tonnes du métal B.