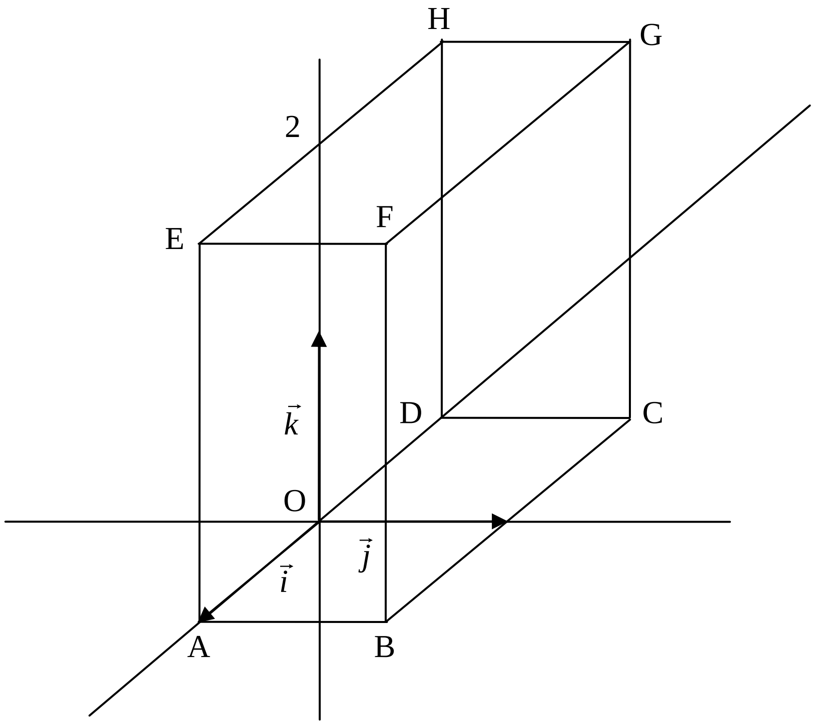
Polynésie – Série ES – Juin 2005 - Exercice

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

La figure ci-dessous représente un pavé droit ; le point O est le milieu de [AD].
Soit P le milieu du segment [EF].



1. a. Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $z = 2$? **[0,5 pt]**
b. Déterminer une équation du plan (ABF). **[0,25 pt]**

c. En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EF). **[0,5 pt]**

2. a. Quelles sont les coordonnées des points A, G et P ? **[0,75]**
b. Placer sur la figure le point Q de coordonnées $(0;0,5;0)$. **[0,25 pt]**

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (APQ). **[1 pt]**

3. a. Construire sur la figure les segments [PQ] et [AG]. **[0,25 pt]**
b. Le point G appartient-il au plan (APQ) ? Justifier. **[1 pt]**

4. On construit la figure précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis on demande au logiciel de représenter le point d'intersection des droites (AG) et (PQ). Quelle pourrait être la réponse de l'ordinateur ? **[0,5 pt]**

Analyse

On a affaire ici à un exercice très classique de géométrie dans l'espace faisant essentiellement appel à des notions vues en classe de première : plan, équation cartésienne d'un plan, intersection de droites dans l'espace.

Résolution

→ *Question 1.a.*

L'ensemble des points de l'espace caractérisé par l'équation $z = 2$ est un plan parallèle au plan (xOy) ; en l'occurrence il s'agit ici du plan (EFG) correspondant à la face supérieure du pavé droit.

→ *Question 1.b.*

Le plan (ABF) correspond à la face avant du pavé droit. Les points A, B, F et E ont tous comme abscisse 1. On en déduit :

Une équation du plan $(\mathbf{ABF})$ est : $x = 1$.

→ *Question 1.c.*

Les points E et F appartiennent aux plans (EFG) et (ABF) (l'arête [EF] du pavé droit est l'arête commune aux faces supérieure et avant) qui, n'étant pas confondus, sont donc sécants suivant la droite (EF). On en déduit, d'après les deux questions précédentes, qu'un système d'équations cartésiennes de la droite (EF) est :

$$(\mathbf{EF})\ \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

→ *Question 2.a.*

Par lecture graphique, on a immédiatement : $\mathrm{A}(1;0;0)$.

Le point G est un point du plan (GDC) correspondant à la face arrière du pavé. Les faces avant et arrière du pavé étant parallèles et l'équation du plan (ABF) étant $x = 1$, l'équation du plan (GDC) est donc de la forme $x = k$ où k est une constante à déterminer.

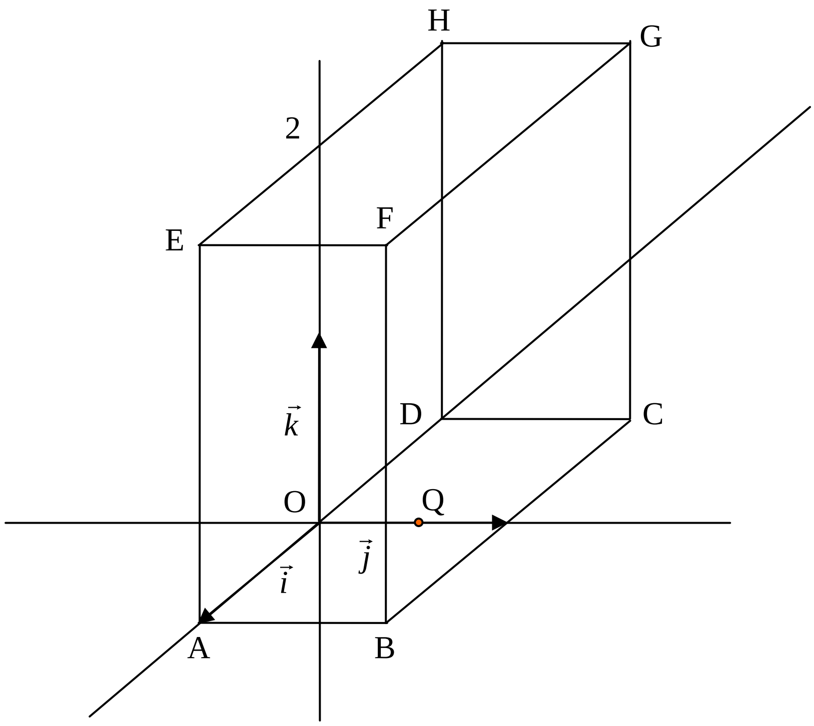
On sait que D est un point de l'axe (Ox) et que l'origine O est le milieu du segment [AD].
Les abscisses des points A et D sont donc opposées. L'abscisse de D vaut donc -1. C'est la valeur de *k*. L'équation du plan (GDC) est donc $x=-1$.
L'abscisse de G vaut donc -1.
Le point G appartient au plan (EFG) d'équation $z=2$. Sa cote vaut donc 2.
Enfin, le plan (BFC) est parallèle au plan (xOz). Son équation est $y=1$. Le point G appartenant au plan (BFC), son ordonnée vaut 1.
Finalement : $G(-1;1;2)$.

Le point P est le milieu du segment [EF].
En tant que point de la droite (EF), son abscisse vaut 1 et sa cote vaut 2.
Il reste donc à déterminer son ordonnée qui est égale à la moyenne arithmétique des ordonnées des points E et F. Or, on a : $E(1;0;2)$ et $F(1;1;2)$.
On en déduit que l'ordonnée de P vaut $\frac{1}{2}$.
Finalement : $P\left(1;\frac{1}{2};2\right)$.

On a donc : $A(1;0;0)$, $G(-1;1;2)$ et $P\left(1;\frac{1}{2};2\right)$.

→ *Question 2.b.*

Voir la figure ci-dessous.



→ *Question 2.c.*

On cherche une équation du plan (APQ) sous la forme : $ax+by+cz+d=0$.

Les coordonnées des points $\text{A}(1;0;0)$, $\text{P}\left(1;\frac{1}{2};2\right)$ et $\text{Q}\left(0;\frac{1}{2};0\right)$ doivent vérifier cette équation. On en alors tire le système suivant :

$$\begin{cases} a+d=0 \\ a+\frac{1}{2}b+2c+d=0 \\ \frac{1}{2}b+d=0 \end{cases}$$

On va résoudre ce système en exprimant chacun des coefficient *a*, *b* et *c* en fonction de *d*.

La première et la troisième égalité nous donnent directement : $a=-d$ et $b=-2d$.

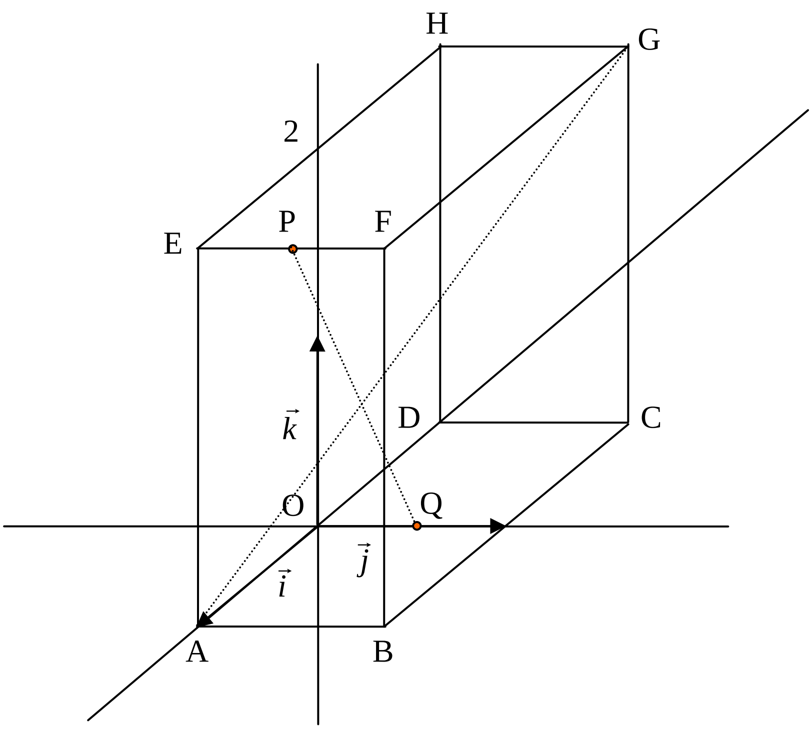
La deuxième équation se récrit alors : $-d+2c=0$. D'où : $c=\frac{1}{2}d$.

Finalement, en choisissant $d=-2$, il vient : $a=2$, $b=4$ et $c=-1$.

Une équation du plan (APQ) est donc : $2x+4y-z-2=0$.

Remarque : il convient de s'assurer, une fois une telle équation obtenue, que les coordonnées des points initialement fournis la vérifient effectivement.

→ *Question 3.a.*



→ *Question 3.b.*

D'après la question 2.a., on a : $\mathrm{G}(-1;1;2)$. Par ailleurs, une équation du plan (APQ) est :

$$2x+4y-z-2=0$$

Avec les coordonnées du point G, on a : $2\times(-1)+4\times1-2-2=4-6=-2\neq0$.

Le point G n'appartient donc pas au plan (APQ).

→ *Question 4.*

Raisonnons par l'absurde en supposant que les droites (AG) et (PQ) soient sécantes. N'étant pas confondues, elles définiraient donc un plan. Ce plan contiendrait ainsi les points A, P, Q et G. En d'autres termes, le point G appartiendrait au plan (APQ), résultat en contradiction avec celui obtenu à la question précédente.

On en déduit donc que les droites (AG) et (PQ) ne sont pas sécantes.

Par ailleurs, on a facilement : $\overrightarrow{\mathrm{AG}}(-2;1;2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}(-1;0;-2)$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires et on en déduit que les droites (AG) et (PQ) ne sont pas parallèles.

Finalement, les droites (AG) et (PQ) ne sont pas coplanaires.

Si l'on effectuait les construction de cet exercice à l'aide d'un logiciel de géométrie et si on lui demandait l'intersection des droites (AG) et (PQ), il nous répondrait par une phrase du type : « Les droites (AG) et (PQ) ne sont pas coplanaires. ».