Polynésie française – Juin 2007 - Exercice

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A\left(\frac{2}{3};-3;2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3};0;-4\right)$.

On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$.
   a. Calculer les coordonnées de E.
   b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.
   c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a) Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P).
   En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.
   b) Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est :
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$$
   En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};4\sqrt{3}-1\right)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).
   b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

Analyse

L'ensemble de l'exercice fait appel à de nombreuses notions de géométrie dans l'espace mais sans présenter de grosses difficultés : barycentre, plan médiateur d'un segment, équation d'un plan, distance d'un point à un plan, équation d'une sphère, équation d'un cercle, représentation paramétrique d'une droite.

Résolution

→ Question 1.a.

Par définition du point E, on a : $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2+1)\overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{OE}$.

D'où, en utilisant les coordonnées des points A et B :

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{3}\left[2\left(\frac{2}{3}\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\right)+\left(-\frac{4}{3}\vec{i}+0\vec{j}-4\vec{k}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(-6\vec{j}\right)=-2\vec{j}$$

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{\boldsymbol{E\left(0;-2;0\right)}}$$

→ Question 1.b.

On a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{ME}+\left(2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\right)$.

Par définition du point E, on a : $2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

D'où : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{ME}$.

Il vient alors :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|\Leftrightarrow\left\|3\overrightarrow{ME}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|\Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|\overrightarrow{MO}\right\|\Leftrightarrow ME=MO.$$

En définitive, l'ensemble (P) est l'ensemble des points équidistants des points E et O :

L'ensemble $\left(P\right)$ est le plan médiateur du segment $\left[OE\right]$.

→ Question 1.c.

D'après le résultat obtenu à la question précédente, nous pouvons affirmer que le vecteur $\overrightarrow{OE}$ est un vecteur normal du plan (P). Comme $\overrightarrow{OE}=-2\vec{j}$, une équation de ce plan est de la forme : $-2y+d=0$, d étant une constante à déterminer.

Le plan (P) passe par le milieu J du segment $[OE]$. Comme $\overrightarrow{OE} = -2\vec{j}$, on a immédiatement $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} = -\vec{j}$. Le point J admet donc comme ordonnée : -1.

On a donc : $-2\times(-1)+d=0$, soit $d=-2$.

Une équation de (P) est donc : $-2y-2=0$.

En divisant par -2, on obtient une autre équation de (P) : $y+1=0$.

Une équation de (P) est : $y=-1$.

→ *Question 2.a.*

Puisque (S) est la sphère de diamètre $[AB]$, son rayon est simplement la longueur $\frac{AB}{2}$.

Le repère étant orthonormal, nous pouvons utiliser les coordonnées des points A et B pour calculer la longueur AB.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+(0-(-3))^2+((-4)-2)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-6)^2} \\ &= \sqrt{4+9+36} \\ &= \sqrt{49} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Le rayon de la sphère (S) vaut $\frac{7}{2}$.

L'espace est muni d'un repère orthonormal et l'équation du plan (P) est $y+1=0$. Les coordonnées du point I vont nous permettre de calculer la distance $d(I,(P))$ de ce point à (P). Plus précisément, seule l'ordonnée de I nous intéresse :

$$d(I,(P)) = \frac{|y_I+1|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = |y_I+1|$$

Le point I étant le milieu du segment $[AB]$, son ordonnées est la moyenne arithmétique des ordonnées des points A et B :

$$y_I = \frac{1}{2}(y_A+y_B) = \frac{1}{2}(-3+0) = -\frac{3}{2}$$

On a donc :

$$d\left(I,(P)\right)=\left|y_I+1\right|=\left|-\frac{3}{2}+1\right|=\frac{1}{2}$$

La distance du point *I* au plan $\left(P\right)$ vaut $\frac{1}{2}$.

La distance que nous venons d'obtenir étant strictement inférieure au rayon de la sphère $\left(S\right)$, nous en concluons immédiatement que l'intersection du plan $\left(P\right)$ et de la sphère $\left(S\right)$ n'est pas vide.

→ *Question 2.b.*

Soit $M\left(x;y;z\right)$ un point appartenant à $\left(P\right)\cap\left(S\right)$.

En complément du calcul de y_I mené à la question précédente, nous avons :

$$x_I=\frac{1}{2}\left(x_A+x_B\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$

Et :

$$z_I=\frac{1}{2}\left(z_A+z_B\right)=\frac{1}{2}\left(2+\left(-4\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-2\right)=-1$$

On en tire alors immédiatement une équation de la sphère $\left(S\right)$:

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

On a alors :

$$M\left(x;y;z\right)\in\left(P\right)\cap\left(S\right)\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2\end{cases}$$

En remplaçant y par -1 dans la deuxième équation il vient :

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(z+1)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{4}+(z+1)^2=\frac{49}{4} \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=\frac{49}{4}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$$

Finalement :

$$M(x;y;z)\in(P)\cap(S)\Leftrightarrow\begin{cases} y=-1 \\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12 \end{cases}$$

Une équation de (C) dans le plan (P) est donc : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$.

Il s'agit de l'équation du cercle d'un cercle. Son centre Ω admet pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3};-1;-1\right)$ et pour rayon : $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

L'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{3};-1;-1\right)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

→ *Question 3.a.*

A partir de $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{3}{2};-1\right)$ et $D\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};4\sqrt{3}-1\right)$, on a : $\overrightarrow{ID}\left(0;1;4\sqrt{3}\right)$.

Il vient alors :

$$M(x;y;z)\in(ID)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\,/\begin{cases} x=t\times 0-\frac{1}{3} \\ y=t\times 1-\frac{3}{2} \\ z=t\times 4\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

Finalement :

La droite (ID) est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont de la forme :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = t - \dfrac{3}{2} \\ z = 4\sqrt{3} \times t - 1 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

→ *Question 3.b.*

Nous cherchons ici l'intersection de la droite (ID) et du cercle (C).

On a :

$$M(x;y;z) \in (ID) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{ID} \\ M \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = t - \dfrac{3}{2} \\ z = t \times 4\sqrt{3} - 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = -1 \\ \left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12 \end{cases}$$

Puisque $y = t - \dfrac{3}{2}$ et $y = -1$, il vient immédiatement : $t = -1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Il vient alors : $z = t \times 4\sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3} - 1$. Soit : $z + 1 = 2\sqrt{3}$.

On a enfin : $\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 0^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.

L'équation $\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12$ est bien vérifiée.

Finalement : $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = -1$ et $z = 2\sqrt{3} - 1$.

La droite (ID) et le cercle (C) admettent comme unique point d'intersection le point $F\left(-\dfrac{1}{3}; -1; 2\sqrt{3} - 1\right)$.