

## France métropolitaine – Juin 2007 - Exercice

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient  $(P)$  et  $(P')$  les plans d'équations respectives

$$x + 2y - z + 1 = 0 \text{ et } -x + y + z = 0$$

Soit  $A$  le point de coordonnées  $(0; 1; 1)$ .

1. Démontrer que les plans  $(P)$  et  $(P')$  sont perpendiculaires.
2. Soit  $(d)$  la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}, \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans  $(P)$  et  $(P')$  se coupent selon la droite  $(d)$ .

3. Calculer la distance du point  $A$  à chacun des plans  $(P)$  et  $(P')$ .
4. En déduire la distance du point  $A$  à la droite  $(d)$ .

---

## Analyse

L'ensemble de l'exercice fait appel à diverses notions de géométrie dans l'espace : plans perpendiculaires, représentation paramétrique d'une droite de l'espace, intersection de deux plans et distance d'un point à un plan. La dernière question est la moins proche du cours et requiert certains éléments de rédaction.

---

## Résolution

### → Question 1.

Le repère considéré étant orthonormal, les équations des plans  $(P)$  et  $(P')$  nous permettent d'obtenir immédiatement des vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  respectivement normaux à  $(P)$  et  $(P')$  :

$$\vec{n}(1;2;-1) \text{ et } \vec{n}'(-1;1;1)$$

On a alors :  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = -1 + 2 - 1 = 0$ .

Comme  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ , les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux et on en déduit :

**Les plans  $(P)$  et  $(P')$  sont perpendiculaires.**

### → Question 2.

Un point  $M(x; y; z)$  appartient à l'intersection des plans  $(P)$  et  $(P')$  si, et seulement si, ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Il équivaut à :

$$\begin{cases} x + 2y = z - 1 \\ -x + y = -z \end{cases}$$

En additionnant les deux égalités membre à membre, on obtient :  $3y = -1$ , soit  $y = -\frac{1}{3}$ .

La deuxième équation nous donne alors :  $x = y + z = -\frac{1}{3} + z$ .

On a donc :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + z \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Si nous choisissons  $z$  comme paramètre en posant  $t = z$ , nous obtenons finalement :

$$M(x; y; z) \in (P) \cap (P') \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Soit, finalement :  $M \in (P) \cap (P') \Leftrightarrow M \in (d)$ .

Conclusion :

**La droite  $(d)$  est la droite d'intersection des plans  $(P)$  et  $(P')$ .**

→ *Question 3.*

Notons  $d(A, (P))$  et  $d(A, (P'))$  les distances du points  $A$  aux plans  $(P)$  et  $(P')$ , respectivement.

Le repère considéré étant orthonormal, on a :

$$d(A, (P)) = \frac{|x_A + 2y_A - z_A + 1|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|0 + 2 \times 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

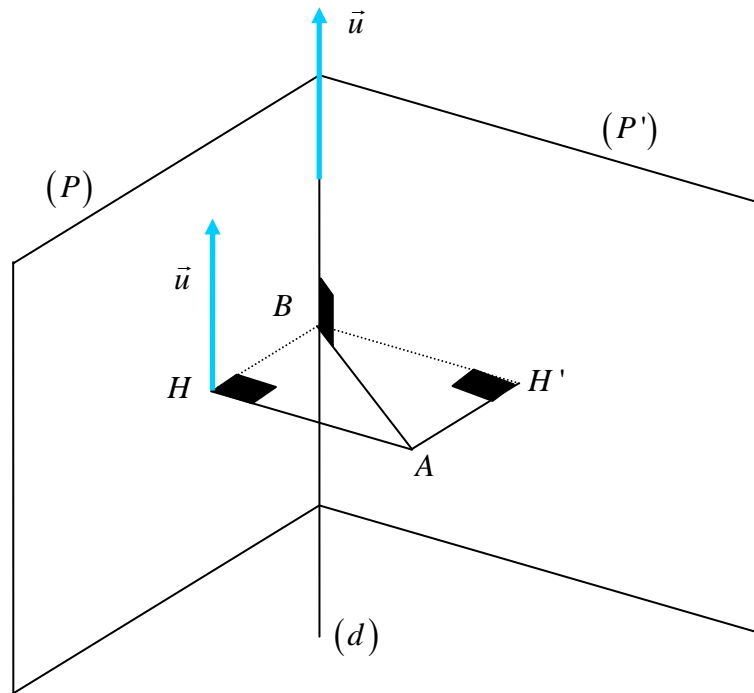
Et :

$$d(A, (P')) = \frac{|-x_A + y_A + z_A|}{\|\vec{n}'\|} = \frac{|-0 + 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**Les distances du point  $A$  aux plans  $(P)$  et  $(P')$  valent respectivement  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  et  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .**

→ *Question 4.*

Soient  $H$  et  $H'$  les projetés orthogonaux du point  $A$  sur les plans  $(P)$  et  $(P')$  respectivement et soit  $B$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(d)$ . On cherche  $AB = d(A, (d))$ .



Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de la droite  $(d)$ .

Comme  $B$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(d)$ , les vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux.

$\overrightarrow{BA}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux, soit  $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u} = 0$

$H$  étant le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $(P)$  et  $\vec{u}$  étant un vecteur directeur d'une droite incluse dans ce plan, les vecteurs  $\overrightarrow{AH}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux, soit  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

On a alors :  $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ .

Le vecteur  $\vec{u}$  est donc orthogonal aux vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BH}$ , non colinéaires : le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur normal du plan  $(BHA)$ . Il s'agit donc du plan orthogonal à  $(d)$  et passant par  $A$ .

On démontrerait de même que le plan  $(BH'A)$  est le plan orthogonal à  $(d)$  et passant par  $A$ .

Les plan  $(BHA)$  et  $(BH'A)$  sont donc confondus : les points  $A, B, H$  et  $H'$  sont coplanaires.

Or, par définition des points  $H$  et  $H'$ , les angles  $\widehat{AHB}$  et  $\widehat{AH'B}$  sont droits. Par ailleurs, les plan  $(P)$  et  $(P')$  sont perpendiculaires. On en déduit que les droites  $(BH)$  et  $(BH')$  sont perpendiculaires. L'angle  $\widehat{NBH'}$  est donc droit.

Le quadrilatère  $AHBH'$  comporte donc trois angles droits. Le quatrième l'est donc aussi.

$AHBH'$  est un rectangle et la longueur  $AB$  est celle de ses diagonales. On la calcule à l'aide du théorème de Pythagore et des valeurs obtenues à la question précédente :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + AH'^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(6+12) = \frac{18}{9} = 2$$

Soit, finalement :  $AB = \sqrt{2}$ .

**La distance du point  $A$  à la droite  $(d)$  est égale à  $\sqrt{2}$ .**