

France métropolitaine – Juin 2007 - Exercice

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le plan \mathcal{P} passant par le point $B(1; -2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2; 1; 5)$ et le plan \mathcal{R} d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

- Démontrer que les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires.
- Démontrer que l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{R} est la droite Δ passant par le point $C(-1; 4; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$.
- Soit le point $A(5; -2; -1)$.

Calculer la distance du point A au plan \mathcal{P} , puis la distance du point A au plan \mathcal{R} .

- Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

2. a) Soit, pour tout nombre réel t , le point M_t de coordonnées :

$$(1 + 2t; 3 - t; t)$$

Déterminer, en fonction de t , la longueur AM_t .

On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- Etudier le sens de variation de la fonction φ sur \mathbb{R} ; préciser son minimum.
- Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Analyse

L'ensemble de l'exercice fait appel à diverses notions de géométrie dans l'espace : plans perpendiculaires, représentation paramétrique d'une droite de l'espace, intersection de deux plans et distance d'un point à un plan. La dernière question permet de retrouver le fait que la distance d'un point P donné à un point situé sur une droite est minimale lorsque le point considéré sur la droite est le projeté orthogonal de P sur cette droite.

Résolution

→ *Question 1.a.*

Le plan \mathcal{P} admet pour vecteur normal $\vec{n}(-2;1;5)$. Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant orthonormal, l'équation cartésienne du plan \mathcal{R} nous donne immédiatement un vecteur \vec{n}' normal à ce plan : $\vec{n}'(1;2;0)$.

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a immédiatement :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

Comme $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux et on en déduit :

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires.

→ *Question 1.b.*

Nous allons commencer par montrer que le point C appartient aux deux plans \mathcal{P} et \mathcal{R} .

Les coordonnées de C vérifient l'équation cartésienne de \mathcal{R} fournie :

$$-1 + 2 \times 4 - 7 = -1 + 8 - 7 = 0$$

Déterminons alors une équation cartésienne de \mathcal{P} . Le vecteur $\vec{n}(-2;1;5)$ étant un vecteur normal à \mathcal{P} , une équation cartésienne de ce plan est : $-2x + y + 5z + d = 0$. Le point $B(1;-2;1)$ étant un point de \mathcal{P} , ses coordonnées vérifient cette équation :

$$-2 \times 1 - 2 + 5 \times 1 + d = 0$$

D'où : $d = -1$ et l'équation ci-dessus se réécrit : $-2x + y + 5z - 1 = 0$.

Les coordonnées de C vérifient cette équation cartésienne de \mathcal{P} :

$$-2 \times (-1) + 4 + 5 \times (-1) - 1 = 2 + 4 - 5 - 1 = 0$$

Le point C appartient bien à l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{R} .

Pour pouvoir conclure, nous allons maintenant montrer que le vecteur \vec{u} est orthogonal aux vecteurs \vec{n} et \vec{n}' . On a facilement :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}' = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$$

Ces deux résultats nous permettent d'établir que la droite Δ passant par C et de vecteur directeur \vec{u} appartient aux plans \mathcal{P} et \mathcal{R} respectivement.

Finalement :

La droite Δ passant par le point $C(-1; 4; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$ est la droite d'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{R} .

→ *Question 1.c.*

Notons $d(A, \mathcal{P})$ et $d(A, \mathcal{R})$ les distances du points A aux plans \mathcal{P} et \mathcal{R} , respectivement.

Le repère considéré étant orthonormal, on a :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|-2x_A + y_A + 5z_A - 1|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|-2 \times 5 - 2 + 5 \times (-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

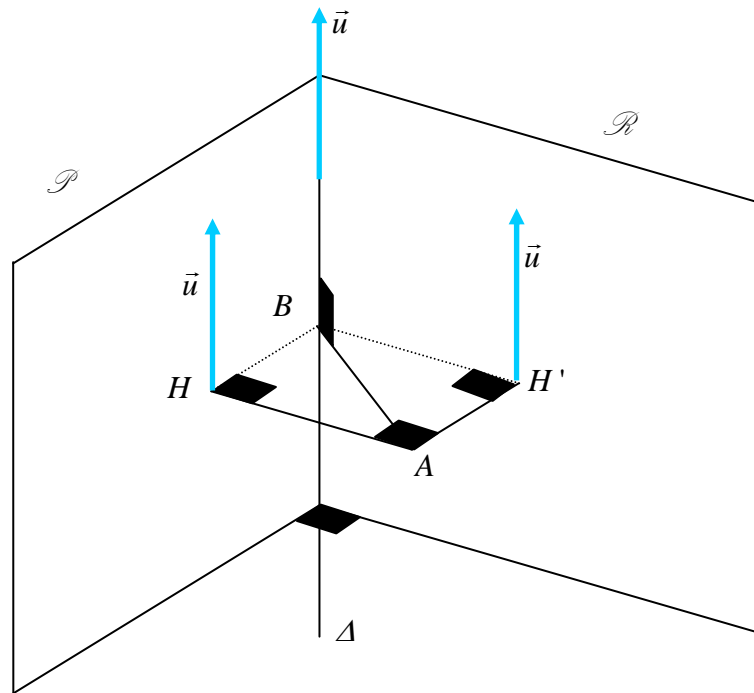
Et :

$$d(A, \mathcal{R}) = \frac{|x_A + 2y_A - 7|}{\|\vec{n}'\|} = \frac{|5 + 2 \times (-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Les distances du point A aux plans \mathcal{P} et \mathcal{R} valent respectivement $\frac{3\sqrt{30}}{5}$ et $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

→ *Question 1.d.*

Soient H et H' les projetés orthogonaux du point A sur les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} respectivement et soit B le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ . On cherche $AB = d(A, \Delta)$ (cf. la figure ci-après).



H étant le projeté orthogonal de A sur le plan \mathcal{P} et \vec{u} étant un vecteur directeur d'une droite incluse dans ce plan, les vecteurs \overrightarrow{AH} et \vec{u} sont orthogonaux.

De façon analogue, on démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AH'}$ et \vec{u} sont orthogonaux.

On conclut de ce qui précède que le vecteur \vec{u} est un vecteur normal au plan (AHH') . Ce plan est donc le plan perpendiculaire à la droite Δ passant par le point A .

On en déduit que le point B appartient au plan (AHH') .

Or, par définition des points H et H' , les angles \widehat{AHB} et $\widehat{AH'B}$ sont droits. Par ailleurs, les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires. On en déduit que les droites (AH) et (AH') sont perpendiculaires (les vecteurs normaux \overrightarrow{AH} et $\overrightarrow{AH'}$ sont orthogonaux). L'angle $\widehat{HAH'}$ est donc droit.

Le quadrilatère $AHBH'$ comporte donc trois angles droits. Le quatrième l'est donc aussi.

$AHBH'$ est un rectangle et la longueur AB est celle de ses diagonales. On la calcule à l'aide du théorème de Pythagore et des valeurs obtenues à la question précédente :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + AH'^2 = \left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}(270+180) = \frac{450}{25} = 18$$

Soit, finalement : $AB = 3\sqrt{2}$.

La distance du point A à la droite Δ est égale à $3\sqrt{2}$.

→ Question 2.a.

On a : $\overline{AM}_t(1+2t-5; 3-t-(-2); t-(-1))$, soit : $\overline{AM}_t(-4+2t; 5-t; t+1)$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}AM_t &= \|\overline{AM}_t\| = \sqrt{(-4+2t)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2} \\ &= \sqrt{16-16t+4t^2 + 25-10t+t^2 + t^2 + 2t+1} \\ &= \sqrt{6t^2 - 24t + 42} = \sqrt{6(t^2 - 4t + 7)} \\ &= \sqrt{6}\sqrt{t^2 - 4t + 7}\end{aligned}$$

Conclusion :

Pour tout t réel : $AM_t = \varphi(t) = \sqrt{6}\sqrt{t^2 - 4t + 7}$.

→ Question 2.b.

La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de la fonction $t \mapsto t^2 - 4t + 7$ dérivable sur \mathbb{R} et prenant ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* et de la fonction $x \mapsto \sqrt{6}\sqrt{x}$ dérivable, comme la fonction racine carrée, sur \mathbb{R}_+^* .

On a alors, pour tout t réel :

$$\varphi'(t) = \sqrt{6} \frac{2t-4}{2\sqrt{t^2-4t+7}} = \sqrt{6} \frac{t-2}{\sqrt{t^2-4t+7}}$$

Le signe de la fonction φ' est celui de son numérateur.

- Pour $t < 2$, on a $\varphi'(t) < 0$ et la fonction φ est strictement décroissante ;
- $\varphi'(2) = 0$;
- Pour $t > 2$, on a $\varphi'(t) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante.

La fonction φ admet donc un minimum pour $t = 2$ et :

$$\varphi(2) = \sqrt{6}\sqrt{2^2 - 4 \times 2 + 7} = \sqrt{6}\sqrt{4 - 8 + 7} = \sqrt{6}\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

La fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Elle admet ainsi un minimum en $t = 2$ et $\varphi(2) = 3\sqrt{2}$.

→ *Question 2.c.*

Si on note $M_t(x; y; z)$, on a, d'après la question 2.a. :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$$

Soit alors le point $D(1; 3; 0)$. Le système ci-dessus correspond à une représentation paramétrique de l'ensemble des points M_t : il s'agit de la droite passant par D et de vecteur directeur de coordonnées $(2; -1; 1)$.

Mais on a : $\overrightarrow{CD}(1 - (-1); 3 - 4; 0 - (-1))$, soit $\overrightarrow{CD}(2; -1; 1)$. Le vecteur \overrightarrow{CD} n'est autre que le vecteur \vec{u} .

On déduit de ce qui précède que l'ensemble des points M_t n'est autre que la droite Δ .

En considérant un point M_t quelconque sur la droite Δ et la distance $\varphi(t) = AM_t$, on conclut que celle-ci est minimale lorsque le point M_t est le projeté orthogonal du point A sur Δ .