

France métropolitaine – Juin 2008 – Série S – Exercice

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;1;0)$, $B(1;2;1)$ et $C(3;-1;2)$.

- Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
 - Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.
- On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (\mathcal{D}) , dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Quelle est l'intersection des trois plans (ABC) , (P) et (Q) ?
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la distance du point A à la droite (\mathcal{D}) .

Analyse

Un exercice classique de géométrie analytique dans l'espace qui met essentiellement l'accent sur des problèmes d'intersection de plans (2 ou 3).

La dernière question est un peu plus délicate (distance point-droite).

Résolution

→ *Question 1.a.*

On a facilement : $\overrightarrow{AB}(0;1;1) = \vec{j} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{AC}(2;-2;2) = 2(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

L'abscisse du vecteur \overrightarrow{AB} étant nulle, pour que ces deux vecteurs soient colinéaires, il faudrait (c'est nécessaire mais pas suffisant ...) que l'abscisse du vecteur \overrightarrow{AC} le soit également. Comme ce n'est pas le cas, on en déduit immédiatement que ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc que :

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

→ *Question 1.b.*

Les points A, B et C n'étant pas alignés, on peut effectivement considérer le plan (ABC) .

L'équation cartésienne fournie étant celle d'un plan (elle est de la forme $ax + by + cz + d = 0$), il suffit de que les coordonnées des points A, B et C la vérifient pour pouvoir conclure.

Pour le point A : $2 \times 1 + 1 - 0 - 3 = 3 - 3 = 0$.

Pour le point B : $2 \times 1 + 2 - 1 - 3 = 4 - 4 = 0$.

Pour le point C : $2 \times 3 + (-1) - 2 - 3 = 6 - 6 = 0$.

Les coordonnées des points A, B et C vérifiant l'équation $2x + y - z - 3 = 0$, on peut conclure :

L'équation $2x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

→ *Question 2.*

Puisque l'espace est rapporté à une repère orthonormal, les coefficients de « x », « y » et « z » des équations cartésiennes fournies nous donnent directement les coordonnées de vecteurs normaux \vec{n}_P et \vec{n}_Q aux plans (P) et (Q) respectivement :

$$\vec{n}_P(1; 2; -1) \text{ et } \vec{n}_Q(2; 3; -2)$$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles ($\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$). On en déduit que ces vecteurs ne sont pas colinéaires et, finalement, que les plans (P) et (Q) sont sécants. Leur intersection est bien une droite.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 M(x; y; z) \in (P) \cap (Q) & \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z+4 \\ 2x+3y=2z+5 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z+4 \\ 2(-2y+z+4)+3y=2z+5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z+4 \\ -y+2z+8=2z+5 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z+4 \\ y=3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \times 3+z+4 \\ y=3 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+z \\ y=3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

En posant $t = z$, il vient finalement :

$$M(x; y; z) \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -2+t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

Conclusion :

L'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (\mathcal{D}) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2+t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

→ *Question 3.*

Si un point $M(x; y; z)$ appartient à l'intersection des trois plans (ABC) , (P) et (Q) , alors il appartient, en particulier à l'intersection des plans (P) et (Q) . On en déduit, d'après la question précédente, que ses coordonnées sont de la forme :

$$\begin{cases} x = -2+t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

On a alors :

$$M(-2+t; 3; t) \in (ABC) \Leftrightarrow 2 \times (-2+t) - t = 0 \Leftrightarrow -4+t=0 \Leftrightarrow t=4$$

Pour $t=4$, on a alors :

$$\begin{cases} x = -2+t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

L'intersection des plans (ABC) , (P) et (Q) est donc le point, que nous notons I , de coordonnées $(2; 3; 4)$.

Les plans (ABC) , (P) et (Q) admettent pour intersection le point $I(2; 3; 4)$.

→ *Question 3.*

Nous proposons ci-dessous deux approches : la première, classique, est conforme au programme et s'appuie sur la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite de l'espace ; la seconde, plus analytique, repose sur un résultat qui ne fait pas, stricto sensu, partie du cours.

1^{ère} approche :

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite (\mathcal{D}) . Dans ces conditions, la distance cherchée est simplement AH .

Par définition de H , on a : $H \in (\mathcal{D})$ et $\overline{AH} \cdot \vec{u} = 0$, où \vec{u} est un vecteur directeur de (\mathcal{D}) .

$$H(x; y; z) \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -2+t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

D'après la représentation paramétrique de la droite (\mathcal{D}) , on a immédiatement : $\vec{u}(1; 0; 1)$.

Il vient alors :

$$\overline{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (-2+t-1) \times 1 + (3-1) \times 0 + (t-0) \times 1 = 0 \Leftrightarrow 2t-3=0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

On en tire alors les coordonnées du point H :

$$\text{Pour } t = \frac{3}{2}, \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{3}{2} \\ y = 3 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} .$$

On a donc : $H\left(-\frac{1}{2}; 3; \frac{3}{2}\right)$. D'où : $\overline{AH}\left(-\frac{1}{2}-1; 3-1; \frac{3}{2}\right)$, soit : $\overline{AH}\left(-\frac{3}{2}; 2; \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{Il vient alors : } AH^2 = \|\overline{AH}\|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(9+16+9) = \frac{34}{4} = \frac{17}{2} .$$

Finalement :

$$\boxed{AH = \sqrt{\frac{17}{2}}}$$

2^{ème} approche

La distance de A à la droite (\mathcal{D}) est la distance minimale entre A et un point de (\mathcal{D}) .

Pour un point $M(x; y; z)$ quelconque de (\mathcal{D}) , on a :

$$AM = \sqrt{(-2+t-1)^2 + (3-1)^2 + (t-0)^2} = \sqrt{(t-3)^2 + 2^2 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 6t + 13}$$

On a alors (équivalence classique à savoir établir) :

$$AM \text{ minimale} \Leftrightarrow AM^2 \text{ minimale}$$

Or : $AM^2 = 2t^2 - 6t + 13 = \varphi(t)$. Il vient immédiatement : $\varphi'(t) = 4t - 6 = 2(2t - 3)$ et on obtient, comme ci-dessus, un minimum pour $t = \frac{3}{2}$.

En définitive :

$$\text{La distance du point } A \text{ à la droite } (\mathcal{D}) \text{ est égale à } \sqrt{\frac{17}{2}} .$$