Pondichéry – Avril 2010 – Série S – Exercice

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.

2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 7+2u \\ y = 2+2u \\ z = -6-u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

4. On considère les points :
A, de coordonnées $\left(-1;0;2\right)$, B, de coordonnées $\left(1;4;0\right)$, et C, de coordonnées $\left(3;-4;-2\right)$.
Le plan $\left(ABC\right)$ a pour équation $x+z=1$.

5. On considère les points :
A, de coordonnées $\left(-1;1;3\right)$, B, de coordonnées $\left(2;1;0\right)$, et C, de coordonnées $\left(4;-1;5\right)$.
On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

Analyse

Les droites et plans de l'espace, vus sous un angle analytique, constituent le thème central de cet exercice. On retrouve les notions de représentation paramétrique de droite (questions 1 et 3), représentation barycentrique de droite (question 5) et équation cartésienne de plan (question 1, 2 et 4). Les trois premières questions traitent de problèmes d'intersection.

Résolution

→ *Question 1.*

La proposition est VRAIE.

On peut procéder de diverses façons.

La représentation paramétrique de la droite considérée nous donne directement le vecteur $\vec{u}(1;-2;3)$ comme vecteur directeur de cette droite.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, l'équation cartésienne du plan considéré nous donne directement le vecteur $\vec{n}(1;2;1)$ comme vecteur normal à ce plan.
Il vient alors, le repère étant orthonormal :

$$\vec{u}.\vec{n} = 1\times 1 + (-2)\times 2 + 3\times 1 = 1 - 4 + 3 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont donc orthonormaux et on en déduit immédiatement que la droite considérée est parallèle au plan considéré.

Pour pouvoir aller plus loin (ce n'est pas nécessaire !), il convient de déterminer si la droite est incluse dans le plan ou lui est strictement parallèle. La représentation paramétrique nous indique que le point $A(2;0;-1)$ appartient à la droite considérée. On vérifie aisément que ce point n'appartient pas au plan considéré : le parallélisme est strict.

On peut également chercher l'intersection de la droite et du plan considéré.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à cette intersection si, et seulement si, il existe un réel *t* tel que l'on ait :

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \\ x+2y+z-3=0 \end{cases}$$

On en déduit : $t+2+2\times(-2t)+3t-1-3=0$, soit : $-2=0$! En d'autres termes, une telle valeur de t n'existe pas : la droite et le plan considérés ont une intersection vide : ils sont strictement parallèles.

→ *Question 2.*

La proposition est FAUSSE.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à l'intersection des trois plans considérés si, et seulement si, ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, il vient :

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z-2(x-2y+3z)=6-2\times 3 \\ 4x-y+4z-4(x-2y+3z)=12-4\times 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 7y-8z=0 \\ 7y-8z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 7y-8z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ z=\dfrac{7}{8}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3\times\dfrac{7}{8}y=3 \\ z=\dfrac{7}{8}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{5}{8}y=3 \\ z=\dfrac{7}{8}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-\dfrac{5}{8}y \\ z=\dfrac{7}{8}y \end{cases}$$

On obtient ainsi une infinité de solutions correspondant à une droite et dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=3-\dfrac{5}{8}t \\ y=t \\ z=\dfrac{7}{8}t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

→ *Question 3.*

La proposition est VRAIE.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à l'intersection des deux droites s'il existe deux réels *t* et *u* tels que :

$$\begin{cases} x = 2-3t = 7+2u \\ y = 1+t = 2+2u \\ z = -3+2t = -6-u \end{cases}$$

Résolvons donc le système : $\begin{cases} 2-3t = 7+2u \\ 1+t = 2+2u \\ -3+2t = -6-u \end{cases}$.

On a :

$$\begin{cases} 3t+2u=-5 \\ t-2u=1 \\ 2t+u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t+2u=-5 \\ t=2u+1 \\ 2t+u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2u+1)+2u=-5 \\ t=2u+1 \\ 2t+u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u+3=-5 \\ t=2u+1 \\ 2t+u=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=2u+1 \\ 2t+u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=2\times(-1)+1 \\ 2t+u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=-1 \\ 2t+u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=-1 \end{cases}$$

Les deux droites considérées sont bien sécantes.

Pour $t=-1$, la première représentation paramétrique fournit :

$$\begin{cases} x = 2-3t = 2-3\times(-1) = \boxed{5} \\ y = 1+t = 1+(-1) = \boxed{0} \\ z = -3+2t = -3+2\times(-1) = \boxed{-5} \end{cases}$$

Pour $u=-1$, la seconde représentation paramétrique fournit :

$$\begin{cases} x = 7+2u = 7+2\times(-1) = \boxed{5} \\ y = 2+2u = 2+2\times(-1) = \boxed{0} \\ z = -6-u = -6-(-1) = \boxed{-5} \end{cases}$$

Le point d'intersection des deux droites est le point de coordonnées $(5;0;-5)$.

→ *Question 4.*

La proposition est VRAIE.

On a facilement : $\overrightarrow{AB}(2;4;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(4;-4;-4)$. Comme $\frac{4}{2} \neq \frac{-4}{4}$, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et les points *A*, *B* et *C* définissent bien un plan.

On constate alors que les coordonnées des points *A*, *B* et *C* vérifient l'équation proposée :

$$-1+2=1+0=3+(-2)=1$$

L'équation $x+z=1$ est bien une équation du plan (ABC).

→ *Question 5.*

La proposition est FAUSSE.

C est un barycentre des points *A* et *B* si, et seulement si, *C* est un point de la droite (AB).

Ici encore, on a facilement : $\overrightarrow{AB}(3;0;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(5;-2;2)$. Comme $-2 \neq 0$, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés. Le point *C* n'appartient donc pas à la droite (AB) ; ce n'est pas un barycentre des points *A* et *B*.