Amérique du Nord – Juin 2010 – Série S – Exercice

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(1;-2;4) \quad B(-2;-6;5) \quad C(-4;0;-3)$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1;-1;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   b. Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
   Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$.
   a. Démontrer que $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.
   b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Analyse

Un exercice d'entraînement idéal pour appliquer certaines notions fondamentales de géométrie dans l'espace : orthogonalité, projetés orthogonaux, produit scalaire, droites et plans, etc. La troisième question, sans être à proprement parler délicate, aborde le thème de la projection orthogonale d'un point sur une droite, thème qui est loin d'être le plus apprécié par les élèves en général …

Résolution

Question 1.a.

Pour montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, il suffit, par exemple, de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Or, on a facilement : $\overrightarrow{AB}(-3;-4;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-5;2;-7)$.

En considérant avec les abscisses et les ordonnées de ces vecteurs, on constate que : $\frac{-5}{-3} \neq \frac{2}{-4}$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Question 1.b.

D'après la question précédente, les points A, B et C n'étant pas alignés, ils définissent bien un plan.

Pour montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal à ce plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$.

Le repère considéré étant orthonormal, on a facilement :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -3\times1+(-4)\times(-1)+1\times(-1) = -3+4-1 = 0$$
$$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -5\times1+2\times(-1)+(-7)\times(-1) = -5-2+7 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Question 1.c.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Or, on a : $\overrightarrow{AM}(x-1; y+2; z-4)$. On en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)\times 1+(y+2)\times(-1)+(z-4)\times(-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &x-y-z-1-2+4=0\\
\Leftrightarrow\ &x-y-z+1=0
\end{aligned}$$

Une équation du plan (ABC) est $x-y-z+1=0$.

Question 2.a.

La droite considérée étant orthogonale au plan (ABC), elle admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$. Un point $M(x, y, z)$ de l'espace appartient alors à cette droite si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. C'est-à-dire s'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{OM}=t\vec{n}$.
Or :

$$\overrightarrow{OM}=t\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\end{cases}$$

Finalement :

La droite passant par O et orthogonale au plan (ABC) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\end{cases}\quad, t\in\mathbb{R}$$

Question 2.b.

Puisque la droite considérée à la question précédente passe par O et est orthogonale au plan (ABC), son intersection avec ce plan n'est autre, par définition, que le projeté orthogonal du point O sur ce plan, c'est-à-dire le point O'.

Puisque le point O' est un point de cette droite, il existe un réel t tel que : $O'(t,-t,-t)$.
Par ailleurs, O' étant un point du plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation $x-y-z+1=0$. On a donc : $t-(-t)-(-t)+1=0$, soit $3t+1=0$ et, finalement : $t=-\frac{1}{3}$.

On en déduit immédiatement : $O'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{O'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$$

Question 3.a.

On a : $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{BC}^2 = t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$.
Mais on a également :
$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}$.

Le point H étant le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC), le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite, en particulier au vecteur $\overrightarrow{BC}$. On a donc : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = 0$, puis $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ et enfin : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}}$$

Question 3.b.

On a facilement : $B(-2;-6;5) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}(-2;-6;5) \Leftrightarrow \overrightarrow{BO}(2;6;-5)$ et $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$.
On en déduit :

$$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = 2\times(-2)+6\times 6+(-5)\times(-8) = -4+36+40 = 72$$

Et :

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = (-2)^2+6^2+(-8)^2 = 4+36+64 = 104$$

D’où :

$$t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2} = \frac{72}{104} = \frac{8\times 9}{8\times 13} = \frac{9}{13}$$

Il vient alors, en notant (x_H, y_H, z_H) les coordonnées du point H :

$$\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} = \frac{9}{13}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 2 = \frac{9}{13} \times (-2) \\ y_H + 6 = \frac{9}{13} \times 6 \\ z_H - 5 = \frac{9}{13} \times (-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{18}{13} - 2 \\ y_H = \frac{54}{13} - 6 \\ z_H = \frac{-72}{13} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{44}{13} \\ y_H = -\frac{24}{13} \\ z_H = -\frac{7}{13} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{t = \frac{9}{13} \text{ et } H\left(-\frac{44}{13}; -\frac{24}{13}; -\frac{7}{13}\right).}$$