## Nouvelle Calédonie – Décembre 2008 – Série S – Exercice

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A\left(3;-2;1\right) \qquad B\left(5;2;-3\right)$$
$$C\left(6;-2;-2\right) \qquad D\left(4;3;2\right)$$

**1.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

**2.** **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\left(2;1;2\right)$ est un vecteur normal au plan $\left(ABC\right)$.

**b.** En déduire une équation du plan $\left(ABC\right)$.

**c.** Montrer que la distance du point D au plan $\left(ABC\right)$ est égale à 3.

**3.** Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

## Analyse

Un exercice classique de géométrie dans l'espace (comportant, évidemment, des considérations de géométrie plane …) où se mêlent les notion de vecteur normal, équation cartésienne de plan, distance d'un point à un plan et volume d'une pyramide. Le fait de traiter la plupart des questions via les coordonnées cartésiennes des objets manipulés (points et vecteurs) ne dispense pas d'un minimum de rédaction !

## Résolution

### *Question 1.*

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a facilement :

$$\overrightarrow{AB}\left(5-3;2-(-2);-3-1\right) \text{ et } \overrightarrow{AC}\left(6-3;-2-(-2);-2-1\right)$$

D'où : $\overrightarrow{AB}\left(2;4;-4\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(3;0;-3\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (l'ordonnée de $\overrightarrow{AC}$ étant nulle, il faudrait qu'il en aille au moins de même pour $\overrightarrow{AB}$), on en déduit immédiatement que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

D'après le calcul précédent, on a : $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}$ avec $\vec{u}\left(1;2;-2\right)$.
D'où, le repère considéré étant orthonormal :

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|2\vec{u}\right\|=2\left\|\vec{u}\right\|=2\sqrt{1^2+2^2+\left(-2\right)^2}=2\sqrt{9}=6$$

De façon analogue, on a : $\overrightarrow{AC}=3\vec{v}$ avec $\vec{v}\left(1;0;-1\right)$.

D'où : $AC=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|3\vec{v}\right\|=3\left\|\vec{v}\right\|=3\sqrt{1^2+0^2+\left(-1\right)^2}=3\sqrt{2}$

Enfin, on a : $\overrightarrow{BC}\left(6-5;-2-2;-2-\left(-3\right)\right)$, soit $\overrightarrow{BC}\left(1;-4;1\right)$.

D'où : $BC=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{1^2+\left(-4\right)^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Comme $AC=BC$, le triangle ABC est isocèle en C.

Par ailleurs : $AC^2+BC^2=2\times\left(3\sqrt{2}\right)^2=2\times18=36=6^2=AB^2$.

On en déduit ainsi que le triangle ABC est rectangle en C.

Le triangle ABC est isocèle et rectangle en C.

### *Question 2.a.*

On a facilement :

$$\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\times 2 + 1\times 4 + 2\times(-4) = 4+4-8 = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\times 3 + 1\times 0 + 2\times(-3) = 6+0-6 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(\mathrm{ABC})$, il s'agit d'un vecteur normal de ce plan.

Le vecteur $\vec{n}(2;1;2)$ est normal au plan $(\mathrm{ABC})$.

### *Question 2.b.*

Le vecteur $\vec{n}(2;1;2)$ étant normal au plan $(\mathrm{ABC})$ une équation de celui-ci est de la forme :

$$2x+y+2z+k=0$$

où *k* est un réel à déterminer.

Ecrivons que les coordonnées du point A vérifient cette équation :

$$A(3;-2;1) \Leftrightarrow 2\times 3+(-2)+2\times 1+k=0 \Leftrightarrow 6+k=0 \Leftrightarrow k=-6$$

Finalement :

Une équation du plan $(\mathrm{ABC})$ est : $2x+y+2z-6=0$.

### *Question 2.c.*

En notant $(x_{\mathrm{D}}\,;y_{\mathrm{D}}\,;z_{\mathrm{D}})$ les coordonnées du points D, on a :

$$d\left(\mathrm{D},(\mathrm{ABC})\right) = \frac{|2x_{\mathrm{D}}+y_{\mathrm{D}}+2z_{\mathrm{D}}-6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|2\times 4+3+2\times 2-6|}{\sqrt{9}} = \frac{|9|}{3} = 3$$

La distance du point D au plan $(\mathrm{ABC})$ est égale à 3.

### *Question 3.*

Le tétraèdre ABCD peut être considéré comme une pyramide de base le triangle ABC et de sommet le point D.

D'après la question précédente, la hauteur *h* de cette pyramide est égale à 3. Par ailleurs, comme le triangle ABC est isocèle et rectangle en C, son aire $\mathcal{A}(\mathrm{ABC})$ vaut :

$$\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2} \times \mathrm{AC}^2 = \frac{1}{2} \times 18 = 9$$

Le volume $\mathcal{V}(\mathrm{ABCD})$ du tétraèdre ABCD vaut alors :

$$\mathcal{V}(\mathrm{ABCD}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\mathrm{ABC}) \times h = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 = 9$$

Le volume du tétraèdre ABCD est égal à 9 unités de volume.