Liban – Mai 2011 – Série S – Exercice

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les trois points :

$$A(1;2;-1),\ B(-3;-2;3) \text{ et } C(0;-2;-3)$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Soit $(\mathscr{P})$ le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$.

Démontrer que les plans (ABC) et $(\mathscr{P})$ sont perpendiculaires.

3. On appelle G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$.

a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2;0;-5)$.

b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan $(\mathscr{P})$ avec la droite (CG).

4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la sphère (S).

Analyse

Après deux premières questions très classiques, applications directes du cours, la question 3 permet d'obtenir par étape les coordonnées du projeté orthogonal du point G sur le plan $(\mathscr{P})$.

On a ainsi « préparé le terrain » à la recherche de l'intersection d'une sphère (obtenue à la question 4.) et d'un plan. Si l'exercice ne présente pas de difficulté majeure, il convient d'avoir des idées claires quant aux thèmes abordés (vecteur normal à un plan, plans perpendiculaires, équation paramétrique de droite, projeté orthogonal d'un point sur un plan, intersection sphère-plan).

Résolution

Question 1.a.

On a facilement :

$$\overrightarrow{AB}\left(-3-1\,;-2-2\,;3-(-1)\right)\text{, soit : }\overrightarrow{AB}\left(-4\,;-4\,;4\right)$$
$$\overrightarrow{AC}\left(0-1\,;-2-2\,;-3-(-1)\right)\text{, soit }\overrightarrow{AC}\left(-1\,;-4\,;-2\right)$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même ordonnée et que celle-ci est non nulle, ils sont colinéaires si, et seulement si, ils sont égaux. Or leurs abscisses diffèrent. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et, de fait, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Question 1.b.

Les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan.
Pour montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC), il suffit de montrer qu'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Le repère considéré étant orthonormal, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-4\times 2+(-4)\times(-1)+4\times 1=-8+4+4=0$$
$$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-1\times 2+(-4)\times(-1)+(-2)\times 1=-2+4-2=0$$

La nullité de ces deux produits scalaires nous permet d'affirmer que le vecteur $\vec{n}$ est bien orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur $\vec{n}$ est bien orthogonal au plan (ABC).

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Question 2.

Le repère considéré étant orthonormal, un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x+y-z+2=0$ est le vecteur $\vec{t}\,(1\,;1\,;-1)$.
Il vient alors : $\vec{n}.\vec{t}=2\times 1+(-1)\times 1+1\times(-1)=2-1-1=0$.
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$, normal au plan (ABC), étant orthogonal au vecteur $\vec{t}$, normal au plan $(\mathscr{P})$, on en déduit immédiatement que ces deux plans sont perpendiculaires.

Les plans (ABC) et $(\mathscr{P})$ sont perpendiculaires.

Question 3.a.

En guise de préambule, soulignons le fait que G est bien défini puisque la somme des poids des points A, B et C vaut : $1+(-1)+2=2\neq 0$.

Si on note $(x_{\mathrm{G}}\,;y_{\mathrm{G}}\,;z_{\mathrm{G}})$ les coordonnées du point G, on a immédiatement :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{G}}=\dfrac{1}{2}\left[1\times 1+(-1)\times(-3)+2\times 0\right]=\dfrac{1+3+0}{2}=2 \\ y_{\mathrm{G}}=\dfrac{1}{2}\left[1\times 2+(-1)\times(-2)+2\times(-2)\right]=\dfrac{2+2+(-4)}{2}=0 \\ z_{\mathrm{G}}=\dfrac{1}{2}\left[1\times(-1)+(-1)\times 3+2\times(-3)\right]=\dfrac{-1-3-6}{2}=-5 \end{cases}$$

On obtient bien les coordonnées précisées dans l'énoncé.

Le point G admet pour coordonnées : $(2\,;0\,;-5)$

Question 3.b.

On a facilement :

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}\big(2-0\,;0-(-2)\,;-5-(-3)\big)\text{, soit : }\overrightarrow{\mathrm{CG}}(2\,;2\,;-2)$$

Ainsi, on a : $\overrightarrow{\mathrm{CG}}=2\vec{t}$ et on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ est normal au plan $(\mathscr{P})$. La droite (CG) est bien orthogonale à ce plan.

La droite (CG) est orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.

Question 3.c.

D'après la question précédente, le vecteur $\vec{t}$ est un vecteur directeur de la droite (CG). Ainsi, le couple $(\mathrm{C}, \vec{t})$ est un repère de cette droite et on en obtient immédiatement la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2+t \\ z = -3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

La droite (CG) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = -2+t \\ z = -3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Question 3.d.

Soit $\mathrm{H}(x_{\mathrm{H}} ; y_{\mathrm{H}} ; z_{\mathrm{H}})$ le point d'intersection de la droite (CG) et du plan $(\mathscr{P})$.

Puisque H appartient à la droite (CG), il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{H}} = t \\ y_{\mathrm{H}} = -2+t \\ z_{\mathrm{H}} = -3-t \end{cases}$$

Par ailleurs, H appartenant au plan $(\mathscr{P})$, ses coordonnées en vérifient l'équation. On a donc :

$$x_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{H}} - z_{\mathrm{H}} + 2 = 0$$

Soit : $t + (-2+t) - (-3-t) + 2 = 0$, ou encore : $3t + 3 = 0$. Finalement : $t = -1$.
On a donc : $\mathrm{H}(-1 ; -3 ; -2)$.

L'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la droite (CG) est le point : $\mathrm{H}(-1 ; -3 ; -2)$.

Question 4.

D'après la définition du point G, on a :

$$\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} = 2\overrightarrow{M\mathrm{G}}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} &\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12 \\ \Leftrightarrow &\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=12 \\ \Leftrightarrow &\ 2\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=12 \\ \Leftrightarrow &\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble (S) des points M de l'espace vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ est l'ensemble des points situés à la distance G du point G. Il s'agit donc, par définition, de la sphère de centre G et de rayon 6.

L'ensemble (S) des points M de l'espace vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$
est la sphère de centre G et de rayon 6.

Question 5.

L'intersection sphère-plan est … un grand classique à connaître !

Il y a fondamentalement deux choses à connaître lorsque l'intersection est non vide :

- d'une part, cette intersection est un cercle (éventuellement réduit à un point lorsque le plan est tangent à la sphère). Ce premier résultat <u>doit</u> être connu. Pour autant, dans cette question, la nature de l'intersection étant demandée, on devra retrouver le fait qu'il s'agit bien d'un cercle …
- D'autre part, le centre de ce cercle est le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan considéré. On peut ignorer ce deuxième résultat mais un simple dessin sur le brouillon permet de le remémorer facilement et dans la démonstration ci-dessous, l'introduction de ce projeté doit presque être un « réflexe naturel » !

Nous avons vu à la question 3.b. que la droite (CG) était orthogonale au plan $(\mathscr{P})$. Or, d'après la question 3.d. l'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la droite (CG) est le point $H(-1;-3;-2)$. On en déduit ainsi que le point H est le projeté orthogonal du point G, centre de la sphère $G(2;0;-5)$, sur le plan $(\mathscr{P})$.

On peut alors caractériser le plan $(\mathscr{P})$, de vecteur normal $\vec{t}$, comme l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{HM}.\vec{t}=0$.

A partir de là, on a :

$$M \in (\mathscr{P}) \cap (S)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ M \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ \left\|\overrightarrow{\mathrm{G}M}\right\| = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ \overrightarrow{\mathrm{G}M}^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ \left(\overrightarrow{\mathrm{GH}} + \overrightarrow{\mathrm{H}M}\right)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ \overrightarrow{\mathrm{GH}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{GH}}.\overrightarrow{\mathrm{H}M} + \overrightarrow{\mathrm{H}M}^2 = 36 \end{cases}$$

Comme on a $\mathrm{G}(2\,;0\,;-5)$ et $\mathrm{H}(-1;-3;-2)$, il vient : $\overrightarrow{\mathrm{GH}}(-3;-3;3)$ et donc : $\overrightarrow{\mathrm{GH}}^2 = (-3)^2 + (-3)^2 + 3^2 = 27$.

Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ étant normal au plan $(\mathscr{P})$ et les points H et M étant deux points de ce plan, on a : $\overrightarrow{\mathrm{GH}}.\overrightarrow{\mathrm{H}M} = 0$.

On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{GH}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{GH}}.\overrightarrow{\mathrm{H}M} + \overrightarrow{\mathrm{H}M}^2 = 36 \Leftrightarrow 27 + \overrightarrow{\mathrm{H}M}^2 = 36 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{H}M}^2 = 9 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{\mathrm{H}M}\right\| = 3$.

Finalement :

$$M \in (\mathscr{P}) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ \left\|\overrightarrow{\mathrm{H}M}\right\| = 3 \end{cases}$$

Dans le plan $(\mathscr{P})$, l'équation $\left\|\overrightarrow{\mathrm{H}M}\right\| = 3$ signifie que le point M appartient au cercle de centre H et de rayon 3.

En définitive :

L'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la sphère (S) est le cercle de $(\mathscr{P})$ de centre le point H et de rayon 3.