France métropolitaine – Juin 2011 – Série S – Exercice

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée des connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $\left(x_0,y_0,z_0\right)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante.

Propriété : Le vecteur $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d\left(M_0,\mathscr{P}\right)$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d\left(M_0,\mathscr{P}\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. Justifier que $\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right|=M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2. Démontrer que $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}=-ax_0-by_0-cz_0-d$.

3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $\left(4;1;5\right)$, $\left(-3;2;0\right)$, $\left(1;3;6\right)$ et $\left(-7;0;4\right)$.

1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$.

b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.

On appelle Δ la droite qui passe par F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$.

c. Retrouver le résultat de la question **1.b**.

3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.

a. Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathscr{S}$.

b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$, intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$.

Analyse

Que l'on ait ou pas réussi à redémontrer, dans la partie A, la formule donnant la distance d'un point à un plan dans l'espace, la question 1 de la partie B ne pose pas de difficulté particulière. La question 2 est un problème d'intersection droite-plan simple qui requiert fondamentalement de maîtriser la notion de représentation paramétrique d'une droite. La question 3, quant à elle, est un problème classique d'intersection sphère-plan et requiert de savoir que le centre du cercle (éventuellement) obtenu n'est rien d'autre que le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan considéré.

Résolution

Partie A – Restitution organisée des connaissances

Question 1.

Si le point M_0 est un point du plan $\mathscr{P}$, alors M_0 et H sont confondus et on a : $\overrightarrow{M_0H} = \vec{0}$ et $M_0H = 0$. L'égalité est ainsi vérifiée.

Supposons maintenant que le point M_0 ne soit pas un point du plan $\mathscr{P}$.
Les points M_0 et H sont distincts et le vecteur $\overrightarrow{M_0H}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont donc colinéaires et il vient immédiatement :

$$\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right| = \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\left\|\vec{n}\right\|\left|\cos\left(\overrightarrow{M_0H},\vec{n}\right)\right| = \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\left\|\vec{n}\right\|$$

Comme le repère considéré est orthonormal, on a : $\left\|\vec{n}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Ainsi, on a finalement : $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right| = \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\left\|\vec{n}\right\| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Question 2.

Notons $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées du point H. Il vient alors : $\overrightarrow{M_0H}\left(x-x_0\,;y-y_0\,;z-z_0\right)$.
Le repère considéré étant orthonormal, on a alors :

$$\begin{aligned}\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} &= a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)\\ &= ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0\end{aligned}$$

Le point H étant un point du plan $\mathscr{P}$, on a : $ax+by+cz+d=0$, soit : $ax+by+cz=-d$.
Il vient donc :

$$\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0$$
$$= -d-ax_0-by_0-cz_0$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = -ax_0-by_0-cz_0-d}$$

Question 3.

D'après la question précédente, on a : $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = -ax_0-by_0-cz_0-d$.
On en déduit : $\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \left|-ax_0-by_0-cz_0-d\right| = \left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|$.
D'après la question 1. On a alors :

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \left|ax_0+by_0+cz_0+d\right| = M_0H\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Le vecteur $\vec{n}$ étant u vecteur normal, il est non nul. On a donc $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\neq 0$ et, finalement :

$$M_0H = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{M_0H = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Partie B

Question 1.a.

A partir des coordonnées des points *A*, *B* et *C*, on a facilement :

$$\overrightarrow{AB}\left(-3-4\,;2-1\,;0-5\right)\text{, soit : }\overrightarrow{AB}\left(-7\,;1\,;-5\right)$$
$$\overrightarrow{AC}\left(1-4\,;3-1\,;6-5\right)\text{, soit : }\overrightarrow{AC}\left(-3\,;2\,;1\right)$$

Comme $\frac{-3}{-7}\neq\frac{2}{1}$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés. Ils définissent bien un plan de l'espace.

Considérons maintenant l'équation $x+2y-z-1=0$.

Avec les coordonnées de *A*, on a : $4+2\times1-5-1=4+2-5-1=0$.

Avec celles de B : $-3+2\times 2-0-1=-3+4-1=0$.
Avec celles de C : $1+2\times 3-6-1=1+6-6-1=0$.

Ainsi, les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $x+2y-z-1=0$. On en déduit immédiatement qu'il s'agit d'une équation du plan passant par les points A, B et C, c'est-à-dire du plan $\mathscr{P}$.

Les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $x+2y-z-1=0$.

Question 1.b.

Le repère considéré étant orthonormal et le plan $\mathscr{P}$ admettant pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$, le vecteur $\vec{n}(1\,;2\,;-1)$ lui est normal.

En utilisant la formule établie dans la partie A, il vient alors :

$$d=\frac{|-7+2\times 0-4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{6}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=\frac{2\times 6}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

La distance d du point F au plan $\mathscr{P}$ est égale à $d=2\sqrt{6}$.

Question 2.a.

La droite Δ passe par le point F. De surcroît, elle est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Elle admet donc pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$, normal à $\mathscr{P}$ (cf. la question précédente).
On en déduit immédiatement la représentation paramétrique suivante de Δ :

$$\begin{cases} x=-7+t \\ y=2t \\ z=4-t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

La droite Δ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-7+t \\ y=2t \\ z=4-t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Question 2.b.

Soit $H(x_H\,;y_H\,;z_H)$ le point d'intersection de la droite Δ et du plan $\mathscr{P}$.

Puisque H appartient à la droite Δ, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, H appartenant au plan $\mathscr{P}$, ses coordonnées en vérifient l'équation. On a donc :

$$x_H + 2y_H - z_H - 1 = 0$$

Soit : $(-7+t) + 2 \times 2t - (4-t) - 1 = 0$, ou encore : $6t - 12 = 0$. Finalement : $t = 2$.
On a donc : $H(-5\,;4\,;2)$.

Le point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$ admet pour coordonnées $(-5\,;4\,;2)$.

Question 2.c.

La distance cherchée est $HF = \left\|\overrightarrow{HF}\right\|$.
On a ici : $\overrightarrow{HF}\left(-7-(-5)\,;0-4\,;4-2\right)$, soit : $\overrightarrow{HF}(-2\,;-4\,;2)$.
Le repère considéré étant orthonormal, il vient alors :

$$HF = \left\|\overrightarrow{HF}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

On retrouve la valeur obtenue à la question **1.a**.

La distance d du point F au plan $\mathscr{P}$ est égale à $d = 2\sqrt{6}$.

Question 3.a.

Pour montrer que le point B appartient à la sphère $\mathscr{S}$ de centre F et de rayon 6, il suffit de montrer que l'on a : $BF = 6$.

On a ici : $\overrightarrow{BF}\left(-7-(-3)\,;0-2\,;4-0\right)$, soit : $\overrightarrow{BF}(-4\,;-2\,;4)$.
Le repère considéré étant orthonormal, il vient alors :

$$BF = \left\|\overrightarrow{BF}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

On a bien $BF = 6$.

Le point B appartient à la sphère $\mathscr{S}$ de centre F et de rayon 6.

Question 3.b.

L'intersection sphère-plan est … un grand classique à connaître !

Il y a fondamentalement deux choses à connaître lorsque l'intersection est non vide :

- D'une part, cette intersection est un cercle (éventuellement réduit à un point lorsque le plan est tangent à la sphère). Ce premier résultat doit être connu.
- D'autre part, le centre de ce cercle est le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan considéré. On peut ignorer ce deuxième résultat mais un simple dessin sur le brouillon permet de le remémorer facilement et dans la démonstration ci-dessous, l'introduction de ce projeté doit presque être un « réflexe naturel » !

Le point H étant le projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$, on peut caractériser ce dernier, de vecteur normal $\vec{n}$, comme l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{\mathrm{H}M}.\vec{n}=0$.

A partir de là, on a :

$$
\begin{aligned}
& M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{S} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathscr{P} \\ M \in \mathscr{S} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathscr{P} \\ \left\|\overrightarrow{FM}\right\| = 6 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathscr{P} \\ \overrightarrow{FM}^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathscr{P} \\ \left(\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HM}\right)^2 = 36 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathscr{P} \\ \overrightarrow{FH}^2 + 2\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM}^2 = 36 \end{cases}
\end{aligned}
$$

A la question 2.c. on a obtenu : $\overrightarrow{FH}^2 = 24$.

Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{FH}$ étant normal au plan $\mathscr{P}$ et les points H et M étant deux points de ce plan, on a : $\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{HM} = 0$.

On a donc :

$$\overrightarrow{FH}^2 + 2\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM}^2 = 36 \Leftrightarrow 24 + \overrightarrow{HM}^2 = 36 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}^2 = 12 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{HM}\right\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Finalement :

$$M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathscr{P} \\ \left\|\overrightarrow{HM}\right\| = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Dans le plan $\mathscr{P}$, l'équation $\left\|\overrightarrow{HM}\right\| = 2\sqrt{3}$ signifie que le point M appartient au cercle de centre H et de rayon $2\sqrt{3}$.

En définitive :

L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$ est le cercle de $\mathscr{P}$ de centre le point H et de rayon $2\sqrt{3}$.