France métropolitaine – Juin 2014 – Série S – Exercice

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).

   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

   a. Donner les coordonnées des points D et F.

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

   d. Calculer les coordonnées du point H.

   e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

   a. Démontrer que $ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$.

   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.

   En déduire que $ME\times\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

   c. Justifier que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

   d. Conclure.

Analyse

L'exercice comporte deux parties très distinctes de par le type de questions abordées. Ces deux parties sont très indépendantes l'une de l'autre.
Dans la première partie, on évalue des connaissances élémentaires de géométrie cartésienne dans l'espace (représentation paramétrique de droite, équation cartésienne de plan, produit scalaire).
Dans la seconde, on traite un problème d'optimisation (ici, recherche de la mesure maximale d'un angle). Ce type de problème est inhabituel dans un exercice de géométrie dans l'espace et la principale difficulté se situe réellement au niveau de la question 2.c. On notera que les trois autres questions peuvent être traitées indépendamment de celle-ci.

Résolution

Question 1.a.

Comme $\overrightarrow{AD}$ est le troisième vecteur du repère choisi, il vient immédiatement : $D(0\,;0\,;1)$.

Comme F est le milieu du côté $[BC]$, il vient : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et on en déduit : $F\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.
Bien sûr, on pouvait immédiatement écrire $B(1\,;0\,;0)$ et $C(0\,;1\,;0)$ puis retrouver les coordonnes de F : $F\left(\frac{1+0}{2}\,;\frac{0+1}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right)$.

$$\boxed{D(0\,;0\,;1)\text{ et } F\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right).}$$

Question 1.b.

Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur directeur de la droite (DF) et on a : $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2}-0\,;\frac{1}{2}-0\,;0-1\right)$, soit $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)$. On peut alors retenir le vecteur $\vec{u}=2\overrightarrow{DF}(1;1;-2)$ comme vecteur directeur de la droite (DF). On a alors :

$$M(x\,;y\,;z)\in(DF)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{DM}=t\vec{u}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\,/\begin{cases}x-0=t\\y-0=t\\z-1=-2t\end{cases}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\,/\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\end{cases}$$

On en déduit une représentation paramétrique de la droite (DF) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Evidemment, si on a conservé le vecteur $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)$ comme vecteur directeur de la droite (DF), on aura obtenu la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique de la droite (DF) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Question 1.c.

Comme le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (DF), il admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{DF}$. On en déduit immédiatement qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est de la forme :

$$x + y - 2z + d = 0$$

où *d* est un réel à déterminer.

Comme le point *A*, origine du repère, appartient au plan $\mathscr{P}$, il vient immédiatement :
$0 + 0 - 2 \times 0 + d = 0$ et donc $d = 0$.
Finalement :

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est :

$$x + y - 2z = 0$$

Question 1.d.

$$M\left(x\,;y\,;z\right)\in\left(DF\right)\cap\mathscr{P}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\,/\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\\x+y-2z=0\end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\\x+y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\\t+t-2\left(1-2t\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\\6t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\\t=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=t=\frac{1}{3}$$

Finalement :

Le point d'intersection de la droite $\left(DF\right)$ et du plan $\mathscr{P}$ est le point $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Question 1.e.

Comme le point E est le milieu du segment $\left[AB\right]$ et comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le premier vecteur du repère choisi, il vient immédiatement $E\left(\frac{1}{2};0\,;0\right)$.

Comme le point G est le milieu du segment $\left[CA\right]$ et comme le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le deuxième vecteur du repère choisi, il vient immédiatement $G\left(0\,;\frac{1}{2};0\right)$.

Il vient alors : $\overrightarrow{HE}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3};0-\frac{1}{3};0-\frac{1}{3}\right)$, soit : $\overrightarrow{HE}\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Puis : $\overrightarrow{HG}\left(0-\frac{1}{3};\frac{1}{2}-\frac{1}{3};0-\frac{1}{3}\right)$, soit $\overrightarrow{HG}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{6};-\frac{1}{3}\right)$.

Le repère choisi étant orthonormé, on a enfin :

$$\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=0$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux. Donc, l'angle $\widehat{EHG}$ est droit.

L'angle $\widehat{EHG}$ est droit.

Question 2.a.

A partir de la relation $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$ (ou directement à partir de la deuxième représentation paramétrique obtenue à la question 1.b.), on obtient :

$$M\left(\frac{1}{2}t\,;\frac{1}{2}t\,;1-t\right)$$

Comme on a : $E\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$, il vient : $\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\,;0-\frac{1}{2}t\,;0-(1-t)\right)$, soit :

$$\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}(1-t)\,;-\frac{1}{2}t\,;-(1-t)\right)$$

D'où, le repère choisi étant orthonormé :

$$\begin{aligned}
ME^2 &= \left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-(1-t)\right)^2=\frac{1}{4}(1-t)^2+\frac{1}{4}t^2+(1-t)^2\\
&=\frac{5}{4}(1-t)^2+\frac{1}{4}t^2=\frac{5}{4}\left(1-2t+t^2\right)+\frac{1}{4}t^2=\frac{5}{4}-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}t^2+\frac{1}{4}t^2\\
&=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}}$$

Question 2.b.

Comme on : $G\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$, il vient $\overrightarrow{MG}\left(0-\frac{1}{2}t\,;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\,;0-(1-t)\right)$, soit :

$$\overrightarrow{MG}\left(-\frac{1}{2}t\,;\frac{1}{2}(1-t\,);-(1-t)\right)$$

On obtient alors immédiatement, les coordonnées de $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MG}$ étant identiques à l'ordre près : $MG^2=ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$. On en déduit immédiatement : $MG=ME$

$$\boxed{\text{Le triangle } MEG \text{ est isocèle en } M.}$$

Puisque la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$ est notée α et que le triangle MEG est isocèle en M, il vient : $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}EG}{EM}$, soit $EM\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}EG$.

Il convient donc de calculer EG.

Comme on a : $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $G\left(0;\frac{1}{2};0\right)$ et comme le repère choisi est orthonormé, il vient :

$$EG=\sqrt{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(0-0\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alors : $EM\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}EG=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$\boxed{EM\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Question 2.c.

On a $0\le\alpha\le\pi$ et donc $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est strictement croissante.

Soit alors $\alpha_{\max}$ la valeur maximale de α.

Pour toute α différente de $\alpha_{\max}$, on a $\alpha<\alpha_{\max}$ et donc $\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha_{\max}}{2}$ puis $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\sin\left(\frac{\alpha_{\max}}{2}\right)$.

Ainsi, $\sin\left(\frac{\alpha_{\max}}{2}\right)$ est maximal.

Réciproquement, supposons que pour $\alpha_{\max}$, on ait $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\sin\left(\frac{\alpha_{\max}}{2}\right)$ pour toute α différente de $\alpha_{\max}$. On en tire alors $\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha_{\max}}{2}$ et donc $\alpha<\alpha_{\max}$.

Ainsi $\alpha_{\max}$ est maximale.

Finalement :

$$\boxed{\alpha \text{ est maximale si, et seulement si, } \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ est maximal.}}$$

A la question 2.b. on a vu que l'on avait : $EM\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, soit $EM=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

En raisonnant comme précédemment mais en tenant compte cette fois du fait que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{ est maximal } \Leftrightarrow\ EM=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\text{ est minimale}$$

En tenant compte enfin du fait que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$EM\text{ est minimale } \Leftrightarrow\ ME^2\text{ est minimal}$$

On a bien :

α est maximale si, et seulement si, ME^2 est minimal.

Question 2.d.

A la question 2.a. on a vu que l'on avait : $ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$.

Le trinôme $at^2+bt+c=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$ est du second degré et le coefficient a de « t^2 » est positif. Il admet ainsi une valeur minimale pour $t=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{5}{2}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Finalement :

La position du point M pour que α soit maximale est définie par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{DM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DF}$$

Complément

La valeur minimale de ME^2 vaut :

$$\left(ME^2\right)_{\min}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5}{2}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{4}=\frac{3\times 25}{2\times 36}-\frac{25}{12}+\frac{5}{4}=\frac{25}{24}-\frac{25}{12}+\frac{5}{4}=\frac{25-50+30}{24}=\frac{5}{24}$$

D'où : $ME_{\min} = \sqrt{\frac{5}{24}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}$ puis : $\sin\left(\frac{\alpha_{\max}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}\times EM_{\min}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Il vient alors : $\alpha_{\max} \simeq 1,77 \text{ rad}$ soit environ 101,54°.

A partir de $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,EM}$ et $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$, il vient :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}}}$$

D'où, finalement : $\alpha = 2\times\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}}}\right)$.

Nous avons représenté ci-dessous une partie de la courbe représentative de la fonction :

$$t \mapsto \alpha = 2\times\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}}}\right)$$