

## Nouvelle-Calédonie – Série ES – Novembre 2002 – Exercice

Une personne place, le 1<sup>er</sup> janvier 2001, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 4%, une somme de  $a$  euros.

De plus chaque 1<sup>er</sup> janvier des années suivantes, c'est à dire au 1<sup>er</sup> janvier 2002, au 1<sup>er</sup> janvier 2003, etc., elle place sur ce compte la somme de 1000 euros.

On pose  $U_0 = a$ . Plus généralement, pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $U_n$  la somme disponible sur le compte, le 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $(2001+n)$ .

1. a) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$U_{n+1} = 1,04U_n + 1000.$$

- b) Montrer que cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

### 2. Utilisation d'une suite auxiliaire géométrique

On pose  $V_n = U_n + 25000$ .

- a) Vérifier que la suite  $(V_n)$  est géométrique, de raison 1,04.

Préciser son premier terme en fonction de  $a$ .

- b) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ .

- c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$U_n = (a + 25000) \times 1,04^n - 25000$$

### 3. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans

Calculer à 0,01 euro près le placement initial minimal  $a$  permettant de disposer sur ce compte, le 1<sup>er</sup> janvier 2005, d'une somme d'au moins 15000 euros.

---

## Analyse

On a affaire ici à une exercice classique sur les suites arithmético-géométriques ne présentant pas de difficulté particulière. L'utilisation d'une suite auxiliaire géométrique permet de fournir explicitement le terme général de la suite initiale.

---

## Résolution

→ *Question 1.a.*

Pour  $n$  entier naturel,  $U_n$  est la somme disponible sur le compte le 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $(2001+n)$ . Cette somme est rémunérée au taux annuel de 4%. Elle va donc générer des

intérêts d'un montant de :  $U_n \times \frac{4}{100} = 0,04U_n$ .

En outre, au 1<sup>er</sup> janvier de l'année suivante  $(2002+n)$ , la personne verse sur le compte une somme de 1000 euros.

Le capital au 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $2002+n$  va donc s'élever à :  $U_n + 0,04U_n + 1000$ , c'est à dire :  $1,04U_n + 1000$ .

On a bien :  $U_{n+1} = 1,04U_n + 1000$ .

**Pour tout entier naturel  $n$ , on a la relation de récurrence :  $U_{n+1} = 1,04U_n + 1000$ .**

→ *Question 1.b.*

Pour  $n = 0$ , on a :  $U_0 = a$ .

Il vient donc, en utilisant la relation précédente :

$$U_1 = 1,04U_0 + 1000 = 1,04a + 1000$$

$$U_2 = 1,04U_1 + 1000 = 1,04(1,04a + 1000) + 1000 = 1,0816a + 2040$$

On a donc :

$$U_1 - U_0 = 1,04U_0 + 1000 - U_0 = 0,04a + 1000$$

$$U_2 - U_1 = 1,04U_1 + 1000 - U_1 = 1,0816a + 2040 - (1,04a + 1000) = 0,0416a + 1040$$

A étant un nombre strictement positif, on a :  $0,04a + 1000 < 0,0416a + 1040$ , c'est à dire :

$$U_1 - U_0 < U_2 - U_1.$$

Ces deux différences n'étant pas égales, on peut conclure que la suite  $(U_n)$  n'est pas arithmétique.

On a, par ailleurs :  $U_1 = 1,04U_0 + 1000$ . Donc :  $\frac{U_1}{U_0} = 1,04 + \frac{1000}{U_0}$ .

On a également :  $\frac{U_2}{U_1} = 1,04 + \frac{1000}{U_1}$ .

Comme  $U_1 \neq U_0$ , on a :  $\frac{1000}{U_1} \neq \frac{1000}{U_0}$ , d'où :  $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ .

Ces deux rapports n'étant pas égaux, on en déduit que la suite  $(U_n)$  n'est pas géométrique.

### → Question 2.a.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $V_n = U_n + 25000$ .

On peut donc écrire, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} + 25000 \\ &= 1,04U_n + 1000 + 25000 \\ &= 1,04U_n + 26000 \\ &= 1,04 \left( U_n + \frac{26000}{1,04} \right) \\ &= 1,04 \left( U_n + \frac{26000}{1,04} \right) \\ &= 1,04(U_n + 25000) \\ &= 1,04V_n \end{aligned}$$

Ce résultat traduit le fait que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 1,04.

**La suite  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 1,04.**

Pour  $n = 0$ , on a :  $V_0 = U_0 + 25000 = a + 25000$ .

**Le premier terme de la suite  $(V_n)$  est  $V_0 = a + 25000$ .**

### → Question 2.b.

D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel  $n$  :

$$V_n = V_0 \times 1,04^n = (a + 25000) \times 1,04^n$$

**Pour tout entier naturel  $n$  :  $V_n = (a + 25000) \times 1,04^n$ .**

→ *Question 2.c.*

A partir de l'expression de  $V_n$  obtenue à la question précédente et de l'égalité  $V_n = U_n + 25000$ , il vient :  $U_n = V_n - 25000 = (a + 25000) \times 1,04^n - 25000$ .

Finalement :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : U_n = (a + 25000) \times 1,04^n - 25000.$$

→ *Question 3.*

Comme  $2005 = 2001 + 4$ , on a ici :  $n = 4$ .

D'après l'énoncé, on souhaite que la somme  $U_4$  soit au moins égale à 15000 euros.

On va donc résoudre l'inéquation :  $U_4 \geq 15000$ , c'est à dire :

$$(a + 25000) \times 1,04^4 - 25000 \geq 15000$$

Cette égalité est équivalente à :  $(a + 25000) \times 1,04^4 \geq 40000$ , soit :  $a + 25000 \geq \frac{40000}{1,04^4}$ .

Finalement :  $a \geq \frac{40000}{1,04^4} - 25000$ .

La valeur arrondie à 0,01 euro près par excès de  $\frac{40000}{1,04^4} - 25000$  est 9192,17.

Conclusion :

**La valeur minimale du capital initial  $a$  à 0,01 euro près pour que l'on puisse disposer sur ce compte d'au moins 15000 euros au 1<sup>er</sup> janvier 2005 est 9192,17 euros.**