

## La Réunion – Juin 2005 – Série ES – Exercice

Le 1<sup>er</sup> janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $u_n$  le nombre d'employés de l'entreprise le 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $(2005+n)$ .

1. a. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ .

La suite  $u$  de terme général  $u_n$  est-elle arithmétique ?

Géométrique ? Justifier les réponses.

- b. Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n - 1\,000$ .

- a. Démontrer que la suite  $v$  de terme général  $v_n$  est géométrique.  
Préciser sa raison.

- b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 500 \times 0,9^n + 1\,000$ .

- c. Déterminer la limite de la suite  $u$ .

3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$ .

En déduire le sens de variation de la suite  $u$ .

4. Au 1<sup>er</sup> janvier 2005, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés.

A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?

---

## Analyse

On a affaire ici à un exercice classique portant sur les suites arithmético-géométriques. On met en évidence la suite géométrique associée à la suite initiale et on peut ainsi exprimer le terme  $u_n$  en fonction de  $n$  pour toute valeur de l'entier  $n$ . Un excellent exercice de révision pour le Bac.

---

## Résolution

### → Question 1.a.

Par définition de la suite  $u$ ,  $u_0$  correspond au nombre d'employés de l'entreprise au 1<sup>er</sup> janvier 2005. D'après l'énoncé, on a donc :  $u_0 = 1\,500$ .

Au cours de l'année 2005, 10% de l'effectif part en retraite soit un total de 150 employés. Mais durant cette même année, 100 jeunes seront embauchés.

L'effectif  $u_1$  de l'entreprise au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2006 vaudra donc :

$$u_1 = 1\,500 - 150 + 100 = 1\,450$$

En raisonnant de façon analogue, on obtient :

$$u_2 = 1\,450 - 145 + 100 = 1\,405$$

Finalement :

$$u_0 = 1\,500, u_1 = 1\,450 \text{ et } u_2 = 1\,405$$

D'après ce qui précède, on a :

$$u_1 - u_0 = 1\,500 - 1\,450 = 50$$

$$u_2 - u_1 = 1\,450 - 1\,405 = 45 \neq 50$$

Si la suite  $u$  avait été arithmétique, ces différences auraient été égales. On en déduit que la suite  $u$  n'est pas arithmétique.

On a également :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1500}{1450} = \frac{30}{29}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1\,450}{1\,405} = \frac{290}{281} \neq \frac{30}{29}$$

Si la suite  $u$  avait été géométrique, ces rapports auraient été égaux. On en déduit que la suite  $u$  n'est pas géométrique.

**La suite  $u$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.**

→ Question 1.b.

Chaque année, 10% de l'effectif du 1<sup>er</sup> janvier partira à la retraite. Cette diminution de 10% correspond à une multiplication par 0,9. Mais durant l'année considérée, l'entreprise embauche 100 jeunes. L'effectif  $u_{n+1}$  au 1<sup>er</sup> janvier de l'année suivante est donc donné par :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100$$

→ Question 2.a.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= 0,9u_n + 100 - 1000 \\ &= 0,9u_n - 900 \\ &= 0,9(u_n - 1000) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

**La suite  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison 0,9.**

→ Question 2.b.

On a :  $v_0 = u_0 - 1000$ . Or, d'après la question 1.a., on a :  $u_0 = 1500$ .

On en tire :  $v_0 = 1500 - 1000 = 500$ .

Finalement, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$v_n = 500 \times 0,9^n$$

Mais, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $v_n = u_n - 1000$ , soit :  $u_n = v_n + 1000$ . D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 500 \times 0,9^n + 1000$$

→ Question 2.c.

La suite  $(v_n)$  est géométrique et sa raison est positive strictement inférieure à 1. Elle est donc convergente et sa limite est nulle. A partir de l'égalité :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1000$ , il vient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1000$$

→ Question 3.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 500 \times 0,9^{n+1} + 1000 - (500 \times 0,9^n + 1000) \\&= 500 \times 0,9^{n+1} + \cancel{1000} - 500 \times 0,9^n - \cancel{1000} \\&= 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n \\&= 500 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) \\&= 500 \times 0,9^n \times (-0,1) \\&= -50 \times 0,9^n\end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$$

0,9 étant un nombre strictement positif, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0,9^n > 0$ .

On en déduit alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, -50 \times 0,9^n < 0$ . Soit :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ .

Finalement :

**La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.**

→ Question 4.

Au 1<sup>er</sup> janvier 2005, l'entreprise compte un effectif de 1 500 employés. Il s'agit d'un sureffectif de 300 employés. L'entreprise cherche donc à atteindre un effectif inférieur à 1 200 employés. On cherche donc le plus petit entier  $n$  tel que :

$$u_n \leq 1200$$

Cette inégalité équivaut à :

$$500 \times 0,9^n + 1000 \leq 1200$$

D'où :

$$0,9^n \leq \frac{1200 - 1000}{500}$$

Soit :

$$0,9^n \leq \frac{2}{5}$$

En utilisant le logarithme népérien et en tenant compte du fait que  $\ln 0,9$  est strictement négatif, il vient :

$$n \geq \frac{\ln 0,4}{\ln 0,9}$$

On a :  $\frac{\ln 0,4}{\ln 0,9} \approx 8,7$  (valeur arrondie au dixième).

On aura ainsi :  $u_8 > 1200$  et  $u_9 < 1200$ .

Finalement :

**C'est au 1<sup>er</sup> janvier 2013 que l'effectif sera,  
pour la première fois, inférieur strictement à 1 200 employés.**