

France métropolitaine – Juin 2009 – Série S – Exercice

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout nombre entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n , $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n , calculer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n

$$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

c. Etudier la convergence de la suite (u_n) .

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 12$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10} .

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n) . Calculer w_{2009} .

Analyse

La première question du sujet est ultra-classique.

La seconde est nettement plus intéressante du fait de la relation de récurrence proposée qui ne laisse pas, à priori, entrevoir la nature de la suite (w_n) ...

Résolution

→ *Question 1.a.*

En utilisant les définitions des suites (v_n) et (u_n) , on obtient, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$$

Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

On déduit immédiatement de ce qui précède :

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

→ *Question 1.b.*

Nous commençons par exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

Puisque (v_n) est une suite géométrique dont la raison nous est connue, il nous suffit de déterminer son premier terme.

Par définition : $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$.

Il vient alors, pour tout entier naturel n : $v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$, puis : $u_n = v_n + 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

Finalement :

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.$$

→ *Question 1.c.*

Puisque la raison, $\frac{1}{3}$, appartient à l'intervalle $]-1; +1[$, la suite (v_n) converge et on a :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-5 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] = 0$. On en déduit alors, par addition, que la suite (u_n) converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-5 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 6 \right] = 0 + 6 = 6$$

La suite (u_n) converge vers 6.

→ *Question 2.a.*

Pour $n = 10$, la relation fournie dans l'énoncé se réécrit :

$$10w_{10} = (10+1)w_{10-1} + 1 = 11w_9 + 1$$

Soit :

$$w_{10} = \frac{1}{10}(11w_9 + 1)$$

Comme $w_9 = 19$, il vient :

$$w_{10} = \frac{1}{10}(11 \times 19 + 1) = \frac{1}{10}(209 + 1) = \frac{210}{10} = 21$$

$w_{10} = \frac{1}{10}(11w_9 + 1) = 21$

→ *Question 2.b.*

Dès la découverte de l'énoncé, les nombres apparaissant dans la deuxième ligne du tableau nous font penser (non ?) aux dix premiers entiers naturels impairs. Le calcul précédent nous conforte dans cette idée. Il reste à formuler « proprement » cette conjecture et à la démontrer.

Nous introduisons la propriété : P_n : « $w_n = 2n + 1$ » et cherchons donc à démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Nous allons établir ce résultat en menant un raisonnement par récurrence.

Initialisation.

On a : $w_0 = 1$. Or, $2 \times 0 + 1 = 1$. On en déduit donc que P_0 est vraie.

Hérédité.

Nous supposons maintenant que la propriété P_n est vraie. C'est-à-dire : $w_n = 2n + 1$.

Nous cherchons à établir que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire : $w_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3$.

La relation fournie dans l'énoncé nous donne, en raisonnant comme à la question précédente et en remplaçant formellement « n » par « $n + 1$ » :

$$(n+1)w_{n+1} = ((n+1)+1)w_{(n+1)-1} + 1 = (n+2)w_n + 1$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $w_n = 2n + 1$. On en tire alors :

$$(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1 = (n+2)(2n+1) + 1 = 2n^2 + 5n + 3$$

On peut s'intéresser au trinôme du second degré : $2x^2 + 5x + 3$.

Le discriminant associé vaut : $5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$. On en déduit que le trinôme considéré admet pour racines :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{4}{4} = -1$$

La factorisation du trinôme en découle immédiatement :

$$2x^2 + 5x + 3 = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right) (x + 1) = (2x + 3)(x + 1)$$

Revenons maintenant à la suite (w_n) :

$$(n+1)w_{n+1} = 2n^2 + 5n + 3 = (2n + 3)(n + 1)$$

Le nombre n étant un entier naturel, la quantité $n + 1$ est non nulle et on obtient finalement :

$$w_{n+1} = 2n + 3$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

On en conclut finalement que la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n :

Pour tout entier naturel n , on a : $w_n = 2n + 1$.

Le calcul de w_{2009} est alors immédiat :

$$w_{2009} = 2 \times 2009 + 1 = 4018 + 1 = 4019$$

$w_{2009} = \mathbf{4019}$
