

## Antilles-Guyane – Septembre 2008 – Série S – Exercice

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

### PARTIE A :

On définit :

– La suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = 13$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}.$$

– La suite  $(S_n)$  par : pour tout entier naturel  $n$ ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ .

En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite  $(S_n)$ .

b. Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

c. Déterminer la limite de la suite  $(S_n)$ .

### PARTIE B :

Etant donné une suite  $(x_n)$ , de nombres réels, définie pour tout entier

naturel  $n$ , on considère la suite  $(S_n)$  définie par :  $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ .

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite  $(x_n)$  est convergente, alors la suite  $(S_n)$  l'est aussi.

Proposition 2 : les suites  $(x_n)$  et  $(S_n)$  ont le même sens de variation.

---

## Analyse

Le sujet requiert fondamentalement de connaître le raisonnement par récurrence et les suites géométriques (limite, somme de termes). On peut ainsi le qualifier de « standard ». Si la première partie est correctement traitée, la seconde ne pose aucun problème.

---

## Résolution

### PARTIE A :

#### → Question 1.

Soit la propriété  $\mathcal{P}_n$  : «  $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$  »

Nous allons montrer, par récurrence, que cette propriété est vraie pour tout rang  $n$  entier naturel.

#### Initialisation.

Pour  $n = 0$ , on a :  $1 + \frac{12}{5^n} = 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13 = u_0$ .

La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.

#### Hérédité.

Soit  $n$  un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie ; c'est-à-dire :  $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ .

Il vient alors :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{12}{5^n} + \frac{4}{5} \\ &= 1 + \frac{12}{5^{n+1}}\end{aligned}$$

La propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie : la propriété  $\mathcal{P}_n$  est héréditaire.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

Comme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$  (limite d'une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1),

il vient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{5^n} = 0$  puis :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{12}{5^n}\right) = 1$ .

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

### → Question 2.a.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}) - (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n) = u_{n+1}$$

D'après la question 1, on a :  $u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$ . Or, pour tout  $n$  entier naturel, on a :  $5^{n+1} > 0$ .

On en déduit :  $u_{n+1} > 0$ , soit :  $S_{n+1} - S_n > 0$ . La suite  $(S_n)$  est donc strictement croissante.

**La suite  $(S_n)$  est strictement croissante.**

### → Question 2.b.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{12}{5^0}\right) + \left(1 + \frac{12}{5^1}\right) + \left(1 + \frac{12}{5^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{12}{5^n}\right)}_{n+1 \text{ termes}} \\ &= (1+1+1+\dots+1) + 12 \left( \frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} \right) \\ &= n+1 + 12 \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= n+1 + 12 \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5}} \\ &= n+1 + 15 \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\ &= n+16 - \frac{3}{5^n} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = n + 16 - \frac{3}{5^n}$$

→ *Question 2.c.*

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ , d'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{5^n} = 0$ .

Par ailleurs :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 16) = +\infty$ .

On en déduit alors (addition) :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

## **PARTIE B :**

Nous donnons ici deux couples de réponses : les premières font référence à la partie A ; les secondes non.

### **Réponses faisant référence à la partie A.**

A la question 1. on a établi la convergence de la suite  $(u_n)$  tandis qu'à la question 2.c, on a établi la divergence de la suite  $(S_n)$ .

La proposition 1 est donc fausse.

La suite  $(5^n)$  est géométrique de raison  $5 > 1$ . Elle est donc strictement croissante. Ainsi, les suites  $\left(\frac{1}{5^n}\right)$  et  $\left(1 + \frac{12}{5^n}\right)$  sont strictement décroissantes. En revanche, à la question 2.a, on a montré que la suite  $(S_n)$  était strictement croissante. Ainsi, les suites  $(u_n)$  et  $(S_n)$  sont de monotonies opposées.

La proposition 2 est donc fausse.

### **Réponses ne faisant pas référence à la partie A.**

On peut considérer la suite  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$ .

Elle est strictement décroissante et converge vers 0.

A contrario, la suite  $(S_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ , est strictement croissante ( $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$ ) et on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ .

Ce deuxième résultat est « classique » et nous donnons ici quelques éléments permettant de l'établir.

On considère pour  $n$  une puissance de 2 :  $n = 2^p$  ( $p \geq 1$ ).

On a, en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \times \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \times \frac{1}{8}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^p}\right)}_{> 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p}} \\
 &> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{p \text{ termes}} = 1 + \frac{p}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel positif  $A$ , on peut trouver  $p$  tel que  $1 + \frac{p}{2} > A$  et on a alors :

$$n > 2^p \Rightarrow S_n > 1 + \frac{p}{2} > A$$

D'où le résultat.

En définitive :

**Les propositions 1 et 2 sont fausses.**