Pondichéry – Avril 2010 – Série S – Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n-3$.
   c. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
   c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Analyse

Un exercice sur les suites qui, toujours dans ce nouvel esprit du baccalauréat, vise à aborder de nombreux thèmes des cours de 1ère et Terminale : suites arithmétiques et géométriques, somme de termes, comparaison, raisonnement par récurrence.

Résolution

Question 1.

Il vient immédiatement :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3}\times 1 - 2 = -\frac{5}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{14}{9}\right) = -\frac{14}{27}$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{5}{3},\ u_2 = -\frac{14}{9} \text{ et } u_3 = -\frac{14}{27}}$$

Question 2.a.

Nous allons établir le résultat grâce à un raisonnement par récurrence en considérant, pour *n* entier naturel supérieur à 4, les propriétés :

$$\mathscr{P}_n : « \ u_n \geq 0 \ »$$

<u>Initialisation.</u>

Pour $n = 4$, on a : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81}$.

On a : $\frac{67}{81} \geq 0$.

La propriété $\mathscr{P}_4$ est donc vraie.

<u>Hérédité.</u>

Soit *n* un entier naturel quelconque fixé supérieur à 4. Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ soit vraie.

On a alors :

$$u_n \geq 0 \text{ (hypothèse de récurrence) qui donne } \frac{1}{3}u_n \geq 0$$
$$n \geq 4 \text{ qui donne } n-2 \geq 2 \geq 0$$

On en déduit alors immédiatement : $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 0$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie . La propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.

En définitive : pour tout entier *n* supérieur à 4, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Pour tout *n* entier naturel supérieur à 4, on a : $u_n \geq 0$.

Question 2.b.

D'après la question précédente, on a : $n \geq 4 \Rightarrow u_n \geq 0$, ce qui équivaut à : $n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n \geq 0$.
On en déduit alors : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2$.
On a donc : $n \geq 4 \Rightarrow u_{n+1} \geq n-2$. Ce qui équivaut à, en effectuant un changement d'indice : $n \geq 5 \Rightarrow u_n \geq (n-1) - 2 = n - 3$.

Pour tout *n* entier naturel supérieur à 5, on a : $u_n \geq n - 3$.

Question 2.c.

On a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty}(n-3) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. On en déduit alors d'après la question précédente (comparaison) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Question 3.a.

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\
&= -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\
&= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\
&= -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}v_n
\end{aligned}$$

On en tire que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

On a par ailleurs :

$$v_0 = -2u_0 + 3\times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$$

> La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$.

Question 3.b.

D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel *n* : $v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Or, par définition : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ On en tire alors : $u_n = \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$, soit :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2}\right] \\
&= \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

Question 3.c.

On peut procéder de diverses façons. Ici, nous regroupons les termes en remarquant que la somme S_n en comporte $n+1$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\
&= \frac{25}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + \frac{3}{2}(0+1+\ldots+n) - \frac{21}{4}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n+1 \text{ termes}} \\
&= \frac{25}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\
&= \frac{25}{4}\times\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4}n(n+1) - \frac{21}{4}(n+1) \\
&= \frac{75}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4}(n+1)(n-7) \\
&= \frac{3}{8}\left[25 - 25\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2n^2 - 12n - 14\right] \\
&= \frac{3}{8}\left[2n^2 - 12n + 11 - 25\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = \frac{3}{8}\left[2n^2 - 12n + 11 - 25\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

A titre de vérification (très partielle !), on pourra calculer S_3 : d'une part, en utilisant les valeurs obtenues à la question 1. ; d'autre part, en utilisant la formule que nous venons d'obtenir.