Liban – Juin 2010 – Série S – Exercice

Partie A - Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$;
- Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

1. a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
   b. Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Analyse

Encore un exercice combinant suites et intégrales. S'il ne présente pas de difficulté particulière, il convient de rédiger les réponses avec soin (raisonnement par récurrence, propriétés de l'intégrale utilisées, …).

Résolution

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Question 1.

D'après la deuxième donnée, on a, pour tout réel x (en choisissant $y=-x$) :

$$e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0$$

Soit, en utilisant cette fois, la première donnée : $e^x \times e^{-x} = 1$.

Finalement : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel, } e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

Question 2.

On va établir ce résultat en menant un raisonnement par récurrence.
Nous considérons donc les propriétés :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « Pour tout } x \text{ réel, } \left(e^x\right)^n = e^{nx} \text{ »}$$

<u>Initialisation.</u>

Pour $n=0$ et pour tout x réel, on a :

- D'une part : $\left(e^x\right)^0 = 1$;
- D'autre part : $e^{0\times x} = e^0 = 1$.

On a bien : pour tout x réel, $\left(e^x\right)^0 = e^{0\times x}$. La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

<u>Hérédité.</u>

Soit n un entier naturel quelconque fixé.
Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Pour tout x réel, on a donc : $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$.

Pour tout réel x, il vient alors :

$$\begin{aligned}
\left(e^x\right)^{n+1} &= \left(e^x\right)^n \times \left(e^x\right)^1 && \text{(propriété des puissances d'exposants entiers)}\\
&= e^{nx} \times e^x && \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&= e^{nx+x} && \text{(deuxième donnée)}\\
&= e^{(n+1)x}
\end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.
La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc héréditaire.

Finalement :

Pour tout réel x et tout entier naturel n : $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$.

Partie B

Question 1.a.

On a, grâce à la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-0\times x}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-1\times x}}{1+e^{-x}}dx\\
&= \int_0^1 \frac{e^0}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx\\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx\\
&= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1-0\\
&= 1
\end{aligned}$$

On a bien :

$$u_0 + u_1 = 1$$

Question 1.b.

Pour tout x réel, on a : $1+e^{-x} > 0$.
Par ailleurs, la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 1+e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

On a donc :

$$u_1=\int_0^1\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\int_0^1\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1=-\left[\ln\left(1+e^{-1}\right)-\ln\left(1+e^{-0}\right)\right]$$
$$=-\ln\left(1+e^{-1}\right)+\ln 2=-\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)+\ln 2=-\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)+\ln 2=-\ln\left(e+1\right)+\ln e+\ln 2$$
$$=1-\ln\frac{e+1}{2}$$

D'après la question précédente, il vient alors :

$$u_0=1-u_1=1-\left(1-\ln\frac{e+1}{2}\right)=\ln\frac{e+1}{2}$$

$$\boxed{u_0=\ln\frac{e+1}{2}\text{ et }u_1=1-\ln\frac{e+1}{2}}$$

Question 2.

Pour tout réel *x*, on a : $1+e^{-x}>1>0$.
Par ailleurs, pour tout réel *x* et tout entier naturel *n*, on a : $e^{-nx}>0$.

On en déduit alors : pour tout réel *x* et tout entier naturel *n* : $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}>0$.

D'où (positivité de l'intégrale) : $\int_0^1\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx\geq 0$, c'est-à-dire : $u_n\geq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n\geq 0.}$$

Question 3.a.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$u_{n+1}+u_n=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx+\int_0^1\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}+e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1 e^{-nx}\frac{e^{-x}+1}{1+e^{-x}}dx$$
$$=\int_0^1 e^{-nx}dx=\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1=-\frac{1}{n}\left(e^{-n\times 1}-e^{-n\times 0}\right)=-\frac{1}{n}\left(e^{-n}-1\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)$$

On a bien :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}.}$$

Question 3.b.

D'après la question 2. on a, pour tout entier naturel n : $u_n \geq 0$.

On a donc, pour tout entier naturel n non nul : $-u_{n+1} \leq 0$ puis $\frac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1} \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$, soit,

d'après le résultat obtenu à la question précédente : $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$. Le résultat est établi.

Pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Question 4.

D'après les questions 2 et 3.b., nous avons, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Comme on a : $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$, il vient : $\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ puis (somme) : $\lim_{n \to +\infty} \left(1-e^{-n}\right) = 1$.

Finalement (rapport) : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$