France métropolitaine – Juin 2010 – Série S – Exercice

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer, à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.
Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geq u_n$.
Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a. $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \frac{1}{n}$;

c. $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$.

3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$.

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

Analyse

Un exercice sur le thème des suites adjacentes, thème traditionnellement générateur de nombreuses confusions reposant elles-mêmes sur des confusions, hélas, classiques entre convergence et monotonie. Rappelons, en particulier que la convergence vers 0 de la suite $(u_n - v_n)$ n'entraîne en rien que les suites (u_n) et (v_n) convergent ! Dans ce cas, elles peuvent admettre une limite infinie (considérez par exemple $u_n = n^2 + \frac{3}{n}$ et $v_n = n^2 - \frac{1}{n^2}$) voire pas de limite (considérez par exemple $u_n = (-2)^n + \frac{1}{n}$ et $v_n = (-2)^n - \frac{5}{n^2}$) !

Résolution

Question 1. Restitution organisée de connaissances

Considérons (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que (qui à renommer ces suites) (u_n) soit croissante et (v_n) décroissante.

D'après la propriété 1 on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \le v_n$.

La suite (v_n) étant décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \le v_0$. De façon similaire, la suite (u_n) étant croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \le u_n$.

D'après ce qui précède, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$.
Ainsi, la suite (u_n) est majorée par v_0 et la suite (v_n) est minorée par u_0.

D'après la propriété 2, on en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. Nous notons alors l et l' leurs limites.

Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, il en va de même pour la suite $(u_n - v_n)$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = l - l'$$

Or, les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0. On a donc, finalement : $l - l' = 0$, c'est-à-dire $l = l'$.

Le résultat est ainsi établi.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Question 2.a.

Pour tout n entier naturel, on a : $10^{-n}=\frac{1}{10^n}=\left(\frac{1}{10}\right)^n$.

Comme $\frac{1}{10}\in]-1;1[$, on a immédiatement (limite d'une suite géométrique) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=0$

puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1+0=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1-0=1$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) admettent donc la même limite et on en tire immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

Comme $\frac{1}{10}\in]0;1[$, la fonction $x\mapsto\left(\frac{1}{10}\right)^x$ est strictement décroissante. Il en va donc de même pour la suite $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$. Ainsi la suite $\left(-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$ est, elle, strictement croissante.

On en déduit alors immédiatement que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante.

D'après les deux conclusions précédentes, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Question 2.b.

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x\mapsto\ln(x+1)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ d'où (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)\right]=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, il vient (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u_n+\frac{1}{n}\right)=+\infty$

Les suites (u_n) et (v_n) admettent donc comme limite commune $+\infty$.
Comme elles sont divergentes, elles ne sont pas adjacentes.

Les suites (u_n) et (v_n) admettent comme limite commune $+\infty$ et ne sont pas adjacentes.

Question 2.c.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, il vient immédiatement (somme) : $\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $-1\le(-1)^n\le 1$ et donc :

$$1-\frac{1}{n}\le 1+\frac{(-1)^n}{n}\le 1+\frac{1}{n}$$

En utilisant le résultat précédent et le théorème des gendarmes, on en tire :

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$$

Les suites (u_n) et (v_n) admettent donc la même limite.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, son opposée est donc strictement croissante sur ce même intervalle. Il en va donc de même pour la suite $\left(-\frac{1}{n}\right)$ et, de fait, pour la suite $\left(1-\frac{1}{n}\right)$. La suite (u_n) est strictement croissante.

Pour tout entier naturel non nul, on a :

$$v_{n+1}-v_n=1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^n}{n}=(-1)^n\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

Ainsi, la différence $v_{n+1}-v_n$ est alternativement positive (*n* pair) et négative (*n* impair) : la suite (v_n) n'est pas monotone.

On en déduit immédiatement que les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes.

Les suites (u_n) et (v_n) admettent comme limite commune 1
et ne sont pas adjacentes.

Question 3.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, il vient immédiatement (somme) : $\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

On en tire également (somme) : $\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)=a$.

Il vient alors (composition) :

- Si $a=0$: $\lim_{x\to+\infty} v_n = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{X\to 0}\ln X = -\infty$;
- Si $a\neq 0$: $\lim_{x\to+\infty} v_n = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)=\lim_{X\to a}\ln X = \ln a$.

Les suites (u_n) et (v_n) admettent donc la même limite si, et seulement si, on a : $\ln a = 1$, c'est-à-dire $a=e$.

Supposons donc $a=e$.

Dans ces conditions on a : $\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} v_n = 1$ et donc $\lim_{x\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

A la question 2.c, nous avons vu que la suite (u_n) était strictement croissante.

Considérons la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x\mapsto \ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

Elle est la composée de :

- La fonction $x\mapsto e+\frac{1}{x}$ qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme d'une fonction constante et de la fonction inverse, strictement décroissante sur cet intervalle.
- La fonction logarithme népérien qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, la fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et la suite (v_n) est strictement décroissante.

En définitive, si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite et on a nécessairement $a=e$. Réciproquement, si $a=e$, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite (on a donc $\lim_{x\to+\infty}(u_n-v_n)=0$) et elles sont monotones de monotonies opposées. Elles sont donc adjacentes.

Ainsi :

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si, et seulement si, on a : $a=e$.