

Partie A. Restitution organisée des connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y , $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n ,
 $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

1. a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1 . En déduire u_0 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Analyse

Suite, intégrale et exponentielle sont au menu de cet exercice qui, pour chacun de ces thèmes, ne fait pas appel aux résultats les plus délicats. En revanche, le cours doit être connu et la rédaction précise.

Résolution

Partie A

Question 1.

Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} e^x \times e^{-x} &= e^{x+(-x)} && (2^{\text{ème}} \text{ résultat}) \\ &= e^0 \\ &= 1 && (1^{\text{er}} \text{ résultat}) \end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Question 2.

Considérons la propriété « $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^n = e^{nx}$ ».

On allons classiquement démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n .

Pour $n = 0$, on a, pour tout x réel : $(e^x)^0 = (e^x)^0 = 1$ et $e^{0x} = e^{0 \times x} = e^0 = 1$.

La propriété est ainsi initialisée.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour un entier naturel n quelconque fixé.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^n = e^{nx}$.

Pour tout x réel, on a alors :

$$\begin{aligned}(e^x)^{n+1} &= (e^x)^n \times e^x \\ &= e^{nx} \times e^x && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= e^{nx+x} && \text{(deuxième résultat fourni dans l'énoncé)} \\ &= e^{(n+1)x}\end{aligned}$$

La propriété est ainsi vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Initialisée et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^n = e^{nx}$$

Partie B

Question 1.a.

$$\text{On a : } u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0 \times x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx \text{ et } u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1 \times x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx .$$

On en déduit immédiatement :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

$$u_0 + u_1 = 1$$

Question 1.b.

$$\text{On a : } u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx .$$

Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f : x \mapsto 1 + e^{-x}$.

Elle est dérivable sur cette intervalle comme somme de deux fonctions dérivables et on a

$$\text{immédiatement : } f' : x \mapsto -e^{-x} . \text{ Il vient donc : } u_1 = \int_0^1 \frac{-f'(x)}{f(x)} dx = - \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx .$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$ et finalement : $\forall x \in [0;1], f(x) > 1 > 0$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto \ln f(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ et :

$$\begin{aligned}u_1 &= -\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -[\ln f(x)]_0^1 \\&= -[\ln(1+e^{-x})]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) - (-\ln(1+e^0)) \\&= -\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + \ln 2 = -\ln \frac{1+e}{e} + \ln 2 \\&= \ln \frac{e}{1+e} + \ln 2 = \ln e - \ln(1+e) + \ln 2 \\&= 1 + \ln 2 - \ln(1+e) \\&= 1 + \ln \frac{2}{1+e}\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a : $u_0 + u_1 = 1$. On en tire immédiatement :

$$u_0 = 1 - u_1 = 1 - \left(1 + \ln \frac{2}{1+e}\right) = -\ln \frac{2}{1+e} = \ln \frac{1+e}{2}$$

$$u_0 = \ln \frac{1+e}{2} \text{ et } u_1 = 1 + \ln \frac{2}{1+e}$$

Question 2.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$. On en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], e^{-nx} > 0$.

Comme on l'a vu à la question précédente, on a aussi : $\forall x \in [0;1], e^{-x} + 1 > 0$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \frac{e^{-nx}}{e^{-x} + 1} > 0$.

On en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^{-x} + 1} dx \geq 0$.

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

Question 3.a.

Soit n un entier naturel non nul.

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{e^{-x} + 1} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^{-x} + 1} dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(n+1)x}}{e^{-x} + 1} + \frac{e^{-nx}}{e^{-x} + 1} \right) dx \\&= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{e^{-x} + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x} + 1)}{e^{-x} + 1} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx \\&= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} (e^{-n \times 1} - e^{-n \times 0}) = -\frac{1}{n} (e^{-n} - 1) \\&= \frac{1}{n} (1 - e^{-n})\end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n} (1 - e^{-n})$$

Question 3.b.

On a vu à la question 2. que l'on avait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, -u_{n+1} \leq 0$. On en tire

alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} (1 - e^{-n}) - u_{n+1} \leq \frac{1}{n} (1 - e^{-n})$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{n} (1 - e^{-n})$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{n} (1 - e^{-n})$$

Question 4.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ puis (somme) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) = 1$.

Par ailleurs : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. On en déduit finalement (produit) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} (1 - e^{-n}) \right] = 0 \times 1 = 0$$

D'après les questions 2. et 3.b. on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}(1 - e^{-n})$

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$