Liban – Mai 2011 – Série S – Exercice

Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=x+e^{-x}$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à termes positifs définie par :

$u_1=0$ et, pour tout entier naturel n non nul : $u_{n+1}=f(u_n)=u_n+e^{-u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x)\leq x$.
On pourra étudier la fonction g définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $g(x)=x-\ln(1+x)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1)\leq \ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(\ln n)=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n)\leq u_n$.

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leq 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}$.

6. a. Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :
$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
$u_n \leq 1+\ln(n-1)$

7. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a montré que :
$\ln(n) \leq u_n \leq 1+\ln(n-1)$

Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

Analyse

Cet exercice consiste fondamentalement en l'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. La première partie consiste classiquement en l'étude de la fonction *f*. La seconde, plus technique, vise à établir le joli résultat $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$ qui exprime l'équivalence (notion hors programme de Terminale) entre u_n et $\ln(n)$: en simplifiant, pour *n* grand, u_n se comporte comme le logarithme népérien de *n* (on parle de « comportement asymptotique de la suite (u_n) »). Ce résultat est assez inattendu au regard de l'expression de $f(x)$ … Non ?

Résolution

Partie A

Question 1.

La fonction identité ($x \mapsto x$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc à fortiori sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

La fonction $x \mapsto -x$, opposée de la fonction identité est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit finalement que la fonction composée $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction *f* est ainsi dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel *x*, on a : $f'(x) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$.
La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $e^x - 1$.

On a : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Par ailleurs, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$.
En conclusion :

- $f'(0) = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0$.

On déduit de l'étude précédente :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Question 2.

On a immédiatement : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Par addition, il vient donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Question 3.

D'après la question précédente, nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

On en déduit immédiatement :

La courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction *f* admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote oblique d'équation : $y = x$.

Partie B

Question 1.

Suivons la suggestion de l'énoncé, et considérons la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $g : x \mapsto g(x) = x - \ln(1+x)$.

On a facilement : $g(0) = 0 - \ln(1+0) = -\ln 1 = 0$.

Par ailleurs, la fonction *g* est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ comme différence de deux fonctions dérivables sur cette intervalle (la fonction identité dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et donc sur $[0\,;+\infty[$) et pour tout réel *x* positif, on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Pour tout réel x positif, on a : $x \geq 0$ et $1 + x \geq 1 > 0$, d'où $g'(x) = \frac{x}{1+x} \geq 0$.

Ainsi, la fonction *g* est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et il vient :

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) = 0$$

Ainsi, on a : $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $x - \ln(1+x) \geq 0$.
Finalement :

Pour tout réel *x* positif, on a : $x \geq \ln(1+x)$.

Question 2.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $\frac{1}{n} > 0$ et donc, d'après la question précédente :

$$\frac{1}{n} \geq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \geq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{n} \geq \ln\frac{n+1}{n} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln(n) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(n+1) \leq \frac{1}{n} + \ln(n) \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$\ln(n+1) \leq \frac{1}{n} + \ln(n)$$

Question 3.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$f(\ln n) = \ln(n) + e^{-\ln(n)} = \ln(n) + \frac{1}{e^{\ln(n)}} = \ln(n) + \frac{1}{n}$$

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$f(\ln n) = \ln(n) + \frac{1}{n}$$

Question 4.

<u>Initialisation.</u>
Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 0$ et $\ln 1 = 0$.
On a bien : $\ln 1 \leq u_1$.

La propriété est vérifiée au rang 1, elle est initialisée.

Hérédité.
Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose que l'on a : $\ln(n) \leq u_n$.
On a vu que la fonction f était strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On en déduit donc :

$$f(\ln(n)) \leq f(u_n)$$

Soit, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$\ln(n)+\frac{1}{n} \leq u_{n+1}$$

Enfin, la question 2 nous permet de conclure :

$$\ln(n+1) \leq u_{n+1}$$

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Conclusion.
La propriété considérée est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\ln(n) \leq u_n$$

Question 5.

Comme on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, il vient (comparaison) d'après le résultat précédent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Question 6.a.

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Considérons l'intervalle $[k-1\,;k]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout x réel de l'intervalle $[k-1\,;k]$: $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k-1}$.

On en déduit alors (intégrale et ordre) : $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1}\,dx$.

On a immédiatement : $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k} \int_{k-1}^{k} dx = \frac{1}{k} \times \left(k - (k-1)\right) = \frac{1}{k}$.

La première inégalité se récrit donc : $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$. Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Question 6.b.

D'après l'énoncé, on a, pour tout entier supérieur ou égal à 2 :

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$

D'après la question précédente il vient alors :

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \ldots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx$$

Or, on a : $\int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n-1} = \ln(n-1) - \ln 1 = \ln(n-1)$.

L'inégalité se récrit alors : $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$. Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_n \leq 1 + \ln(n-1)$$

Question 7.

Des questions 4 et 6.b, on tire que pour tout entier supérieur ou égal à 2, on a :

$$\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$$

On a : $n \geq 2 \Rightarrow \ln(n) \geq \ln 2 > 0$. On déduit alors de la double inégalité précédente :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln(n)}$$

Soit : $1 \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln(n)}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} &= \frac{1}{\ln(n)}+\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)}+\frac{\ln\left[n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln(n)} \\ &= \frac{1}{\ln(n)}+\frac{\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1+\frac{1}{\ln(n)}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \\ &= 1+\frac{1+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\end{aligned}$$

En définitive on a :

$$1 \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq 1+\frac{1+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, d'où (somme) : $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ puis (composition et continuité de la fonction ln en 1) : $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\ln 1=0$. Enfin (somme) : $\lim_{n\to+\infty}\left[1+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=1$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$, il vient (division) : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=0$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right]=1$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$$