

## Liban – Juin 2004 – Série S – Exercice

**1.** Soit  $x$  un nombre réel positif ou nul et  $k$  un entier strictement supérieur à  $x$ .

**a.** Montrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$  :

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

**b.** En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$ ,

$$\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$$

**c.** Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

**2. a.** Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$ .

(on pourra écrire  $\frac{n^{n-1}}{n!}$  comme un produit de  $n-1$  facteurs supérieurs ou égaux à 1)

**b.** En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ .

---

## Analyse

Un exercice intéressant permettant d'obtenir deux limites classiques via le théorème de comparaison. La difficulté majeure consiste à obtenir les comparaisons permettant de conclure, en particulier celle de la question 1.

---

## Résolution

### Question 1.a.

Initialisation.

Pour  $n = k$ , on a :  $\frac{k^n}{n!} = \frac{n^n}{n!}$  et  $\frac{k^k}{k!} = \frac{n^n}{n!}$ . L'inégalité (qui, dans ce cas, est une égalité) est bien vérifiée.

Hérédité.

Soit  $n$  un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à  $k$ .

On suppose la propriété vraie au rang  $n$ , soit :  $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$ .

On s'intéresse alors aux nombres  $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}$  et  $\frac{k^k}{k!}$  que l'on souhaite comparer.

On a :  $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!}$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors :

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k}{n+1} \times \frac{k^k}{k!}$$

Comme  $k \leq n$ , on a immédiatement :  $k < n+1$  puis  $\frac{k}{n+1} < 1$ . Il vient finalement :

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k}{n+1} \times \frac{k^k}{k!} < \frac{k^k}{k!}$$

La propriété est ainsi vérifiée au rang  $n+1$ , elle est héréditaire.

Finalement :

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$ , on a :

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

### Question 1.b.

Le réel  $x$  étant positif, il en va de même pour  $x^n$  et on a, en utilisant l'inégalité précédente, valable pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$  :

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!} \Rightarrow \frac{k^n x^n}{n!} \leq \frac{k^k x^n}{k!} \Leftrightarrow \frac{x^n}{n!} \leq \frac{k^k x^n}{k!} \times \frac{1}{k^n} \Leftrightarrow \frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^n}{k^n} \times \frac{k^k}{k!} \Leftrightarrow \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$$

Finalement :

Pour tout réel  $x$  positif et tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$  :

$$\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$$

### Question 1.c.

L'entier  $k$  étant strictement supérieur à  $x$ , on a :  $\frac{x}{k} < 1$  et, immédiatement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$ .

On en déduit alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!} \right] = 0$ .

En tenant compte de  $x^n \geq 0$ , l'inégalité précédente se récrit :  $0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$ . Il vient

alors, en passant à la limite :  $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!} \right]$ , soit :  $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} \leq 0$ .

D'où le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

### Question 2.a.

Comme le suggère l'énoncé, on a :

$$\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{\overbrace{n \times n \times n \times \dots \times n \times n}^{n-1 \text{ facteurs "n"}}}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2} = \frac{n}{n} \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n-2} \times \dots \times \frac{n}{3} \times \frac{n}{2}$$

On obtient ainsi  $n-1$  facteurs de la forme  $\frac{n}{p}$  avec  $p$  entier compris entre 2 et  $n$ . Comme  $n$  est supérieur ou égal à 2, chacun de ces facteurs est supérieur ou égal à 1 et il en va de même pour leur produit.

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$$

*Question 2.b.*

A partir de l'inégalité précédente, on obtient, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$\frac{n^{n-1}}{n!} \times n \geq 1 \times n$ , c'est-à-dire :  $\frac{n^n}{n!} \geq n$ . Comme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , le théorème de comparaison nous

permet alors de conclure :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$