Pondichéry – Avril 2013 – Série S – Exercice

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.

Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.

Il y a, au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.

Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125 j_n + 0{,}525 a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625 j_n + 0{,}625 a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.

2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. On admet que la matrice Q est inversible et que

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$.

Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.

3. On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix}$$

a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Analyse

Une étude classique de « dynamique des populations » à l'aide du calcul matriciel ((plus précisément des puissances de matrices). On se trouve classiquement dans une situation ou la puissance de la matrice *A* (la matrice qui caractérise la dynamique étudiée) peut être calculée à l'aide d'une matrice diagonale (la matrice *D*). Etonnamment, si le travail préparatoire est complètement mené (jusqu'à la question 2.c.), l'expression de la matrice A^n est fournie pour les questions 3.a. et 3.b. C'est un peu dommage car l'utilisation de l'égalité $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$ ne requiert que la matrice D^n, puissance très simple à évaluer pour un élève de spécialité, la matrice *D* étant diagonale.

Résolution

Question 1.a.

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \times j_n + 0,525 \times a_n \\ 0,625 \times j_n + 0,625 \times a_n \end{pmatrix}$$

D'après les deux relations de récurrence vérifiées par les suites (j_n) et (a_n), on a immédiatement : $\begin{pmatrix} 0,125 \times j_n + 0,525 \times a_n \\ 0,625 \times j_n + 0,625 \times a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

Finalement, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A \times U_n = U_{n+1}$$

Question 1.b.

Pour $n = 0$, il vient :

$$U_{0+1} = U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,125 \times 200 + 0,525 \times 500 \\ 0,625 \times 200 + 0,625 \times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$$

En arrondissant à l'unité par défaut, on en conclut :

Après une année d'observation, il y a 287 animaux jeunes et 437 animaux adultes.

Pour $n=1$, il vient :

$$U_{1+1}=U_2=A\times U_1=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}j_1\\ a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}287,5\\ 437,5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,125\times 287,5+0,525\times 437,5\\ 0,625\times 287,5+0,625\times 437,5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}265,625\\ 453,125\end{pmatrix}$$

En arrondissant à l'unité par défaut, on en conclut :

Après deux années d'observation, il y a 265 animaux jeunes et 453 animaux adultes.

Question 1.c.

On montre classiquement par récurrence que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, U_n=A^n\times U_0$.

On pose donc, pour tout *n* entier naturel non nul, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $U_n=A^n\times A_0$ ».

Initialisation.

Pour $n=0$, l'égalité de la question 1.a. s'écrit : $U_1=A\times U_0$, c'est-à-dire $U_1=A^1\times U_0$.

La propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

Hérédité.

Soit *n* un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie. On a donc : $U_n=A^n\times A_0$.

Il vient alors : $U_{n+1}=A\times U_n=A\times\left(A^n\times A_0\right)=\left(A\times A^n\right)\times A_0=A^{n+1}\times A_0$.

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion.

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, U_n=A^n\times U_0$$

Question 2.a.

On a :

$$
\begin{aligned}
Q\times D\times Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7\times(-0,25)+3\times 0 & 7\times 0+3\times 1 \\ -5\times(-0,25)+5\times 0 & -5\times 0+5\times 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1,75\times 0,1+3\times 0,1 & -1,75\times(-0,06)+3\times 0,14 \\ 1,25\times 0,1+5\times 0,1 & 1,25\times(-0,06)+5\times 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Q\times D\times Q^{-1} = A}$$

Question 2.b.

On pose, pour tout n entier naturel non nul, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $A^n = Q\times D^n\times Q^{-1}$ ».

Initialisation.
L'égalité de la question précédente s'écrit : $A^1 = A = Q\times D^1\times Q^{-1}$.
La propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

Hérédité.
Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie. On a donc : $A^n = Q\times D^n\times Q^{-1}$.
Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A\times A^n \\
&= \left(Q\times D\times Q^{-1}\right)\times\left(Q\times D^n\times Q^{-1}\right) && \text{Question 2.a. et hypothèse de récurrence} \\
&= Q\times D\times\left(Q^{-1}\times Q\right)\times D^n\times Q^{-1} && \text{Associativité de la multiplication matricielle} \\
&= Q\times D\times I_2\times D^n\times Q^{-1} && \text{Définition de deux matrices inverses} \\
&= Q\times D\times D^n\times Q^{-1} && \text{Neutralité de la matrice identité pour la multiplication} \\
&= Q\times\left(D\times D^n\right)\times Q^{-1} && \text{Associativité de la multiplication matricielle} \\
&= Q\times D^{n+1}\times Q^{-1}
\end{aligned}
$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion.
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n = Q\times D^n\times Q^{-1}}$$

Question 2.c.

La matrice D étant une matrice diagonale, il vient immédiatement, pour tout entier naturel n non nul : $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}$, soit : $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 3.a.

On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix}$$

D'après la question 1.c., on a, pour tout entier naturel n non nul : $U_n = A^n \times U_0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(0,3+0,7\times(-0,25)^n\right)\times 200 + \left(0,42-0,42\times(-0,25)^n\right)\times 500 \\ \left(0,5-0,5\times(-0,25)^n\right)\times 200 + \left(0,7+0,3\times(-0,25)^n\right)\times 500 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,3\times 200+0,42\times 500+(0,7\times 200-0,42\times 500)\times(-0,25)^n \\ 0,5\times 200+0,7\times 500+(-0,5\times 200+0,3\times 500)\times(-0,25)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 270-70\times(-0,25)^n \\ 450+50\times(-0,25)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :$$
$$j_n = 270 - 70\times(-0,25)^n$$
$$a_n = 450 + 50\times(-0,25)^n$$

Remarque :

Pour $n=1$, on obtient $\begin{pmatrix} j_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270-70\times(-0,25)^1 \\ 450+50\times(-0,25)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270+70\times 0,25 \\ 450-50\times 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$ et pour $n=2$, on obtient : $\begin{pmatrix} j_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270-70\times(-0,25)^2 \\ 450+50\times(-0,25)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270-70\times 0,062\,5 \\ 450+50\times 0,062\,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265,625 \\ 453,125 \end{pmatrix}$.

On retrouve ainsi les résultats obtenus à la question 1.b.

Comme $-0,25 \in]-1;1[$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,25)^n$.

Il vient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[70 \times (-0,25)^n\right] = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[50 \times (-0,25)^n\right] = 0$ et, finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} j_n = \lim_{n \to +\infty} \left[270 - 70 \times (-0,25)^n\right] = 270$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left[450 + 50 \times (-0,25)^n\right] = 450$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} j_n = 270 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} a_n = 450}$$

Question 3.b.

D'après les deux limites calculées à la question précédente, on peut conclure :

A terme, les populations de jeunes animaux et d'animaux adultes seront très proches de 270 et 450 individus respectivement.

Remarques :

- La raison commune des suites géométriques $\left(70 \times (-0,25)^n\right)$ et $\left(50 \times (-0,25)^n\right)$ étant négative, ces suites prennent des valeurs alternativement supérieures et inférieures à leurs limites.
- La valeur absolue de la raison commune des suites géométriques $\left(70 \times (-0,25)^n\right)$ et $\left(50 \times (-0,25)^n\right)$ vaut $0,25 = \frac{1}{4}$. La convergence sera donc assez rapide et c'est seulement après quelques années que les valeurs des populations de jeunes animaux et d'animaux adultes seront proches de 270 et 450 individus respectivement.