Liban – Mai 2013 – Série S – Exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	*a*, *b* et *c* sont des nombres réels *i* et *n* sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	*a* prend la valeur 3 *b* prend la valeur 8

Traitement :	Saisir *n*
	Pour *i* variant de 2 à *n*
	    c prend la valeur a
	    a prend la valeur b
	    b prend la valeur …
	Fin Pour

Sortie :	Afficher *b*

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer QP.

On admet que $A = PDQ$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

5. A l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

Analyse

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 étudiée à l'aide du calcul matriciel. La situation est ici prétexte à compléter un petit algorithme et mener quelques raisonnements par récurrence classiques. Le sujet est construit de telle sorte que la calculatrice ne soit pas requise (matrices d'ordre 2, coefficients très simples) mais il convient de ne pas y voir une règle générale ! Dans la dernière question, la puissance de la matrice *A* (la matrice qui caractérise la récurrence) aurait pu être demandée au lieu d'être fournie …

Résolution

Question 1.

Pour $n = 0$, la relation de récurrence donne :

$$u_{0+2} = u_2 = 5u_{0+1} - 6u_0 = 5u_1 - 6u_0 = 5\times 8 - 6\times 3 = 40 - 18 = \boxed{22}$$

Pour $n = 1$, la relation de récurrence donne :

$$u_{1+2} = u_3 = 5u_{1+1} - 6u_1 = 5u_2 - 6u_1 = 5\times 22 - 6\times 8 = 110 - 48 = \boxed{62}$$

$$u_2 = 22 \text{ et } u_3 = 62$$

Question 2.a.

A la première exécution de la boucle « Pour » $i = 2$), on a : $a = 3 = u_0$ et $b = 8 = u_1$.
La variable *c* prend alors la valeur de la variable *a*, c'est-à-dire u_0 et la variable *a* prend la valeur de la variable *b* c'est-à-dire u_1.
Comme $u_2 = 5u_1 - 6u_0$, on va donc affecter à la variable *c*, en troisième ligne de la boucle, le résultat du calcul $6a - 5c$.

Les valeurs des variables *b*, *a* et *c* (on se demandera, légitimement, pourquoi nous fournissons ces variables dans cet ordre-là !!! ☺) au début de la boucle « Pour » sont donc :

i	b	a	c
2	u_1	u_0	
3	u_2	u_1	u_0
4	u_3	u_2	u_1
…	…	…	…
i	u_{i-1}	u_{i-2}	u_{i-3}

On note alors qu'après la dernière exécution de la boucle ($i = n$), la variable b contiendra $u_i = u_n$ qui est bien la valeur souhaitée.

Finalement :

La dernière ligne de la boucle « Pour » s'écrit : b prend la valeur $6a - 5c$

Question 2.b.

D'après les valeurs fournies, on peut émettre la conjecture suivante :

La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang $n = 7$.

Question 3.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times u_{n+1} - 6 \times u_n \\ 1 \times u_{n+1} + 0 \times u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A \times C_n$$

avec : $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = A \times C_n$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Considérons alors, pour tout n entier naturel, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $C_n = A^n C_0$ ».

<u>Initialisation</u>.

Pour $n = 0$, on a : $C_n = C_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs : $A^n C_0 = A^0 C_0 = I_2 C_0 = C_0$.

On a bien : $C_0 = A^n C_0$.
La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u>.

Soit n un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie. On a donc : $C_n = A^n C_0$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= A\times C_n && \text{(résultat précédent)} \\ &= A\times\left(A^nC_0\right) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(A\times A^n\right)\times C_0 && \text{(associativité du produit matriciel)} \\ &= A^{n+1}\times C_0 \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

<u>Conclusion</u>.

Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel *n*.

Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\, C_n = A^nC_0}$$

Question 4.

On a :

$$QP=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times 2+3\times 1 & -1\times 3+3\times 1\\ 1\times 2+(-2)\times 1 & 1\times 3+(-2)\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3 & -3+3\\ 2+(-2) & 3+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

$$\boxed{QP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2}$$

Posons, pour tout *n* entier naturel non nul, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $A^n = PD^nQ$ ».

<u>Initialisation</u>.
Pour $n=1$, on a $A^n = A^1 = A$. Par ailleurs : $PD^nQ = PD^1Q = PDQ = A$ (la dernière égalité est admise dans l'énoncé).
Ainsi, on a : $A^1 = PD^1Q$. La propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>.
Soit *n* un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie. On a donc : $A^n = PD^nQ$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A\times A^n \\
&= (P\times D\times Q)\times(P\times D^n\times Q) && (\text{Résultat admis et hypothèse de récurrence}) \\
&= P\times D\times(Q\times P)\times D^n\times Q && (\text{Associativité de la multiplication matricielle}) \\
&= P\times D\times I_2\times D^n\times Q^{-1} && (Q \text{ et } P \text{ étant deux matrices inverses l'une de l'autre}) \\
&= P\times D\times D^n\times Q && (\text{Neutralité de la matrice identité pour la multiplication}) \\
&= P\times(D\times D^n)\times Q && (\text{Associativité de la multiplication matricielle}) \\
&= P\times D^{n+1}\times Q
\end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion.
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nQ}$$

Question 5.

D'après la question 3, on a, pour tout entier naturel *n* : $C_n = A^nC_0$. C'est-à-dire, en tenant compte de l'expression de A^n admise dans cette question :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = C_n = A^nC_0 = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times2^{n+1}-2\times3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times2^n-2\times3^n \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
u_n &= 8\times(-2^n+3^n)+3\times(3\times2^n-2\times3^n) \\
&= -8\times2^n+8\times3^n+9\times2^n-6\times3^n \\
&= 2^n+2\times3^n
\end{aligned}$$

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = 2^n+2\times3^n$.

Remarques :

- Cette expression de u_n est encore valable pour *n* nul.
- La conjecture de la question 2.b. peut facilement être établie (en étant généralisée), la suite (u_n) étant la somme de deux suites géométriques strictement croissantes (premiers termes strictement positifs et raisons strictement supérieures à 1).

Comme $2>1$ et $3>1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} 2^n = \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et donc : $\lim_{n\to+\infty} 2\times 3^n = +\infty$.

Finalement (somme) : $\lim_{n\to+\infty} \left(2^n + 2\times 3^n\right) = \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ n'admet pas de limite finie mais elle diverge vers } +\infty.}$$