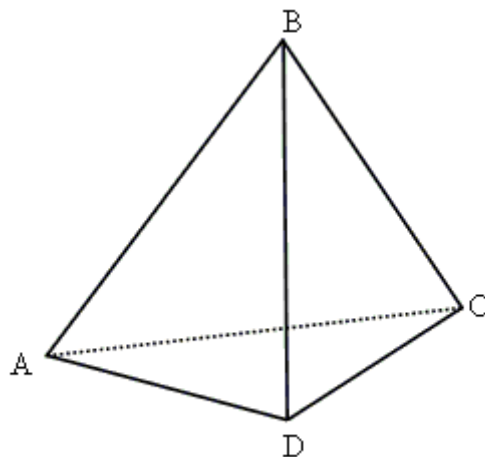


On considère un tétraèdre $ABCD$.

On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB], [CD], [BC], [AD], [AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D .



1. Montrer que les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont concourantes en G .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.

(On dit que le tétraèdre est équi facial, car ses faces sont isométriques).

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales.

3. a. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN) .

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB) . Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD) .

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

Analyse

Un exercice classique sur une belle propriété des tétraèdres isofaciaux. On pourra déplorer un certain manque de précision dans ce sujet qui ... abuse du terme « orthogonal » là où, parfois, le terme « perpendiculaire » eut été préférable.

Résolution

→ Question 1.

Par définition de l'isobarycentre, on a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. De même, J est le milieu de $[CD]$ et on a donc : $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GI} + \underbrace{\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GJ} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [IJ] \end{aligned}$$

Le calcul vectoriel ci-dessus nous a permis de démontrer que G appartenait à la droite (IJ) et, plus précisément, que G était le milieu du segment $[IJ]$.

On montrerait de façon tout à fait analogue que G appartient aux droites (KL) et (MN) (plus précisément, on établirait que G est le milieu des segments $[KL]$ et $[MN]$).

Le résultat est ainsi établi.

Les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont concourantes en G .

→ Question 2.a.

On a montré, à la question précédente, que $[IJ]$ et $[KL]$ admettaient le même milieu G . On en tire immédiatement le résultat général (que $ABCD$ soit équifacial ou pas) : $IKJL$ est un parallélogramme.

Considérons la face ABD . Puisque I est le milieu de $[AB]$ et L est le milieu de $[AD]$ alors (théorème de Thalès) $IL = \frac{1}{2}BD$. On montre de façon analogue que l'on a : $IK = \frac{1}{2}AC$.

Comme le tétraèdre $ABCD$ est équilatéral, on a $AC = BD$ et on en déduit finalement :

$$\boxed{IK = IL} = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$$

Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange. On en déduit :

$IKJL$ est un losange.

En raisonnant de façon tout à fait analogue, on établit que les quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$ sont également des losanges.

→ *Question 2.b.*

Les diagonales d'un losange étant perpendiculaires (dans le plan des quatre sommets), on déduit du résultat précédent que :

Les droites (IJ) et (KL) , (IJ) et (MN) , (KL) et (NM) sont orthogonales.

→ *Question 3.a.*

D'après la question précédente, la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (KL) et (MN) (en G puisqu'il s'agit, d'après la question 1, du point d'intersection commun à ces trois droites). Or, (KL) et (MN) sont deux droites perpendiculaires du plan (MKN) . On en déduit :

La droite (IJ) est perpendiculaire en G au plan (MKN) .

→ *Question 3.b.*

La question précédente nous permet d'affirmer, le point G n'appartenant pas à la droite (MK) , que les droites (IJ) et (MK) sont orthogonales. Il vient alors :

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

Dans le triangle ABC , M est le milieu du segment $[AB]$ et K celui du segment $[BC]$. On en déduit (réciproque du théorème de Thalès) que les droites (AB) et (MK) sont parallèles. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{MK} sont donc colinéaires. Comme $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$, il vient alors $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, soit, finalement :

Les droites (IJ) et (AB) sont orthogonales.

Remarque : I étant le milieu de (AB) , les droites (IJ) et (AB) sont en fait perpendiculaires en I .

De façon analogue à ce qui vient d'être fait, on déduit de la question 3.a. que les droites (IJ) et (KN) sont orthogonales ((KN) est une droite du plan (MKN) ne passant pas par G). On a donc :

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KN} = 0$$

On considère alors le triangle BCD qui nous conduit à établir le parallélisme des droites (KN) et (CD) . Les vecteurs \overrightarrow{KN} et \overrightarrow{CD} sont donc colinéaires. Et comme $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KN} = 0$, il vient : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, soit, finalement :

Les droites (IJ) et (CD) sont orthogonales.

→ *Question 3.c.*

Rappelons qu'un point de l'espace appartient au plan médiateur d'un segment si, et seulement si, il appartient à une droite passant par le milieu de ce segment et perpendiculaire à son support.

G appartient à la droite (IJ) qui est perpendiculaire à (AB) en I qui est le milieu de $[AB]$. D'après ce qui précède, G appartient au plan médiateur de $[AB]$.

Mais la droite (IJ) , toujours d'après la question précédente, est perpendiculaire à (CD) en J , qui est le milieu de $[CD]$. G appartient donc au plan médiateur de $[CD]$.

Finalement :

Le point G appartient aux plans médiateurs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

→ *Question 4.*

Les questions 3.a., 3.b. et 3.c. nous ont permis d'établir que le point G appartenait aux plans médiateurs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

On en tire : $GA = GB$ et $GC = GD$.

En raisonnant de façon similaire, on montrera que la droite (KL) est perpendiculaire aux droites (BC) et (AD) en K et L respectivement. En particulier, on en tirera que le point G appartient au plan médiateur du segment $[BC]$.

On en tire alors : $GB = GC$.

Ces égalités permettent d'obtenir immédiatement : $GA = GB = GC = GD$.

G étant équidistant des sommets du tétraèdre, on déduit de ce qui précède :

G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.