Antilles-Guyane – Série ES – Septembre 1998 - Exercice

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 1 mm sur les axes).
Dessiner l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y\leq 300 \\ 4x+3y\leq 625 \\ 0\leq x\leq 100 \\ 0\leq y\leq 140 \end{cases}$$

2. Une entreprise fabrique des téléviseurs et des magnétoscopes. Elle utilise dans la fabrication de ces appareils deux types de composants électroniques.

- La production d'un téléviseur nécessite 5 composants de type A et 4 de type B ;
- La production d'un magnétoscope nécessite 10 composants de type A et 3 de type B ;
- Pour des raisons d'approvisionnement, les consommations mensuelles ne peuvent excéder 1 500 composants de type A et 625 de type B ;
- Par ailleurs, la situation de l'entreprise sur le marché ne lui permet pas d'écouler plus de 100 téléviseurs et 140 magnétoscopes par mois.

Le bénéfice réalisé est de 200€ sur un téléviseur et de 300€ sur un magnétoscope.

a. Soit x le nombre de téléviseurs que produit l'entreprise en un mois et soit y le nombre de magnétoscopes.
Ecrire les inéquations exprimant les contraintes de production dans la fabrication des téléviseurs et des magnétoscopes.
b. En déduire le domaine des contraintes (utiliser le **1.**) ;
c. Calculer en fonction de x et y le bénéfice réalisé en un mois par cette entreprise. Celle-ci peut-elle réaliser un bénéfice de 30 000€ , de 60 000€ ? On justifiera graphiquement les réponses.

d. Déterminer la quantité de téléviseurs et de magnétoscopes à produire pour que le bénéfice soit maximal. Quel est le montant de ce bénéfice ?

Analyse

On a affaire ici à un exercice classique d'optimisation (maximisation du bénéfice) sous contrainte. Il se résout à l'aide d'éléments de géométrie plane simples.

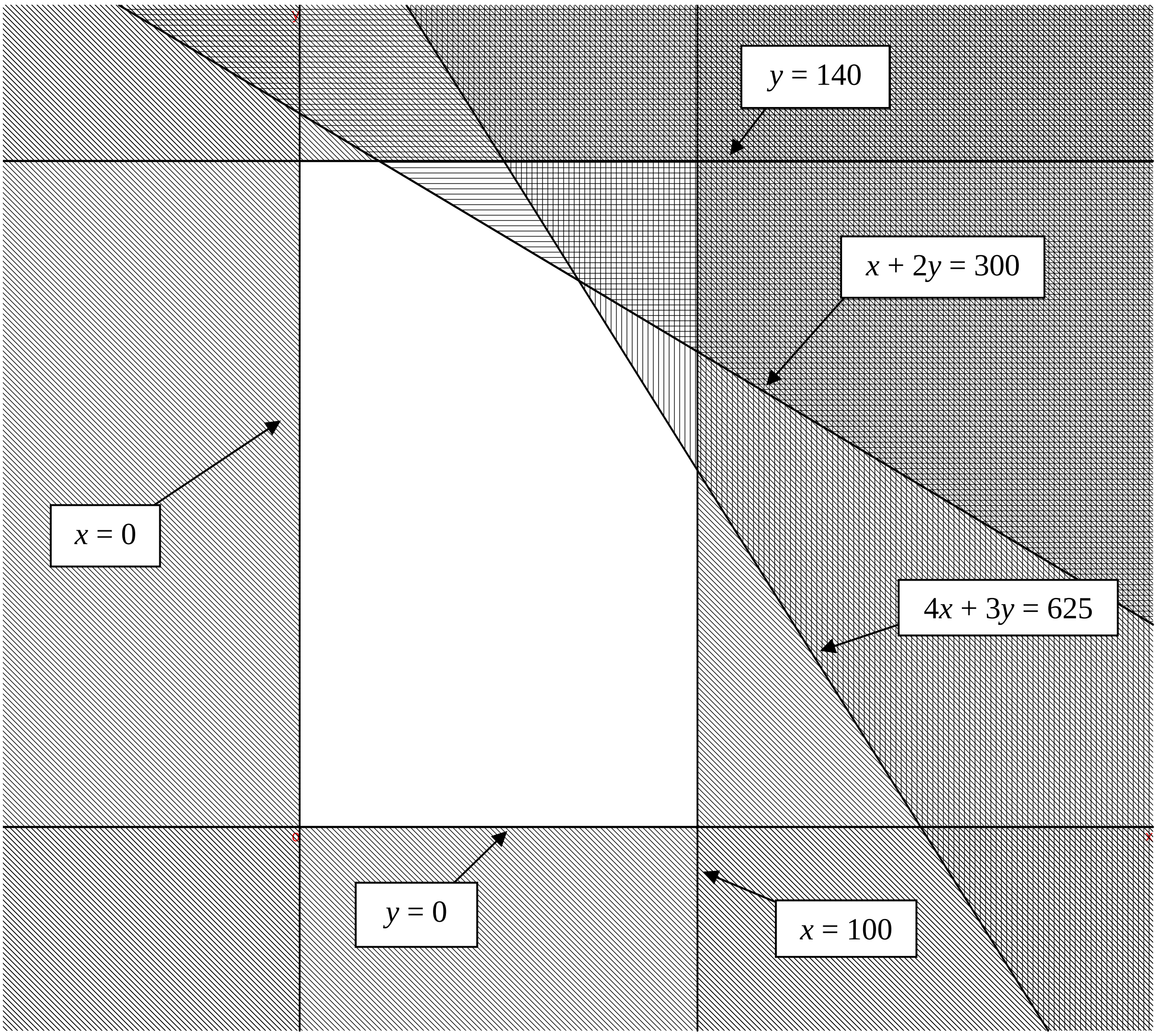
Résolution

→ *Question 1.*

L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y\leq 300 \\ 4x+3y\leq 625 \\ 0\leq x\leq 100 \\ 0\leq y\leq 140 \end{cases}$$

correspond au domaine (obtenu à l'aide du logiciel GEOPLAN) non hachuré ci-dessous, la frontière étant incluse (les inégalités sont larges). Il s'agit d'un domaine convexe dont la frontière est un hexagone non régulier.



→ *Question 2.a.*

En un mois, l'entreprise produit *x* téléviseurs et *y* magnétoscopes. Les grandeurs x et y correspondant à des productions, on a :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Du fait de sa situation sur le marché, l'entreprise ne produit pas plus de 100 téléviseurs et pas plus de 140 magnétoscopes. On a donc :

$$\begin{cases} x \leq 100 \\ y \leq 140 \end{cases}$$

En combinant les deux systèmes obtenus précédemment, il vient :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 100 \\ 0 \leq y \leq 140 \end{cases}$$

Exprimons maintenant les contraintes sur les composants.

La fabrication d'un téléviseur requiert 5 composants de type A et celle d'un magnétoscope 10. Pour *x* téléviseurs et *y* magnétoscopes, le besoin en composants de type A s'élève donc à : $5x+10y$. Or, l'entreprise ne peut excéder une consommation mensuelle de composants A de 1500 unités. On a donc : $5x+10y \leq 1500$. Soit, en simplifiant :

$$x+2y \leq 300$$

La fabrication d'un téléviseur requiert 4 composants de type B et celle d'un magnétoscope 3. Pour *x* téléviseurs et *y* magnétoscopes, le besoin en composants de type B s'élève donc à : $4x+3y$. Or, l'entreprise ne peut excéder une consommation mensuelle de composants B de 625 unités. On a donc :

$$4x+3y \leq 625$$

Finalement, en reprenant le premier système et les deux inéquations que nous venons d'obtenir, on conclut :

Les contraintes de production dans la fabrication des téléviseurs et des magnétoscopes s'expriment sous la forme du système de quatre inéquations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{0 \leq x \leq 100} \\ \mathbf{0 \leq y \leq 140} \\ \mathbf{x+2y \leq 300} \\ \mathbf{4x+3y \leq 625} \end{cases}$$

→ *Question 2.b.*

Le système des contraintes obtenu à la question précédente est identique au système fourni dans la question 1. On en déduit :

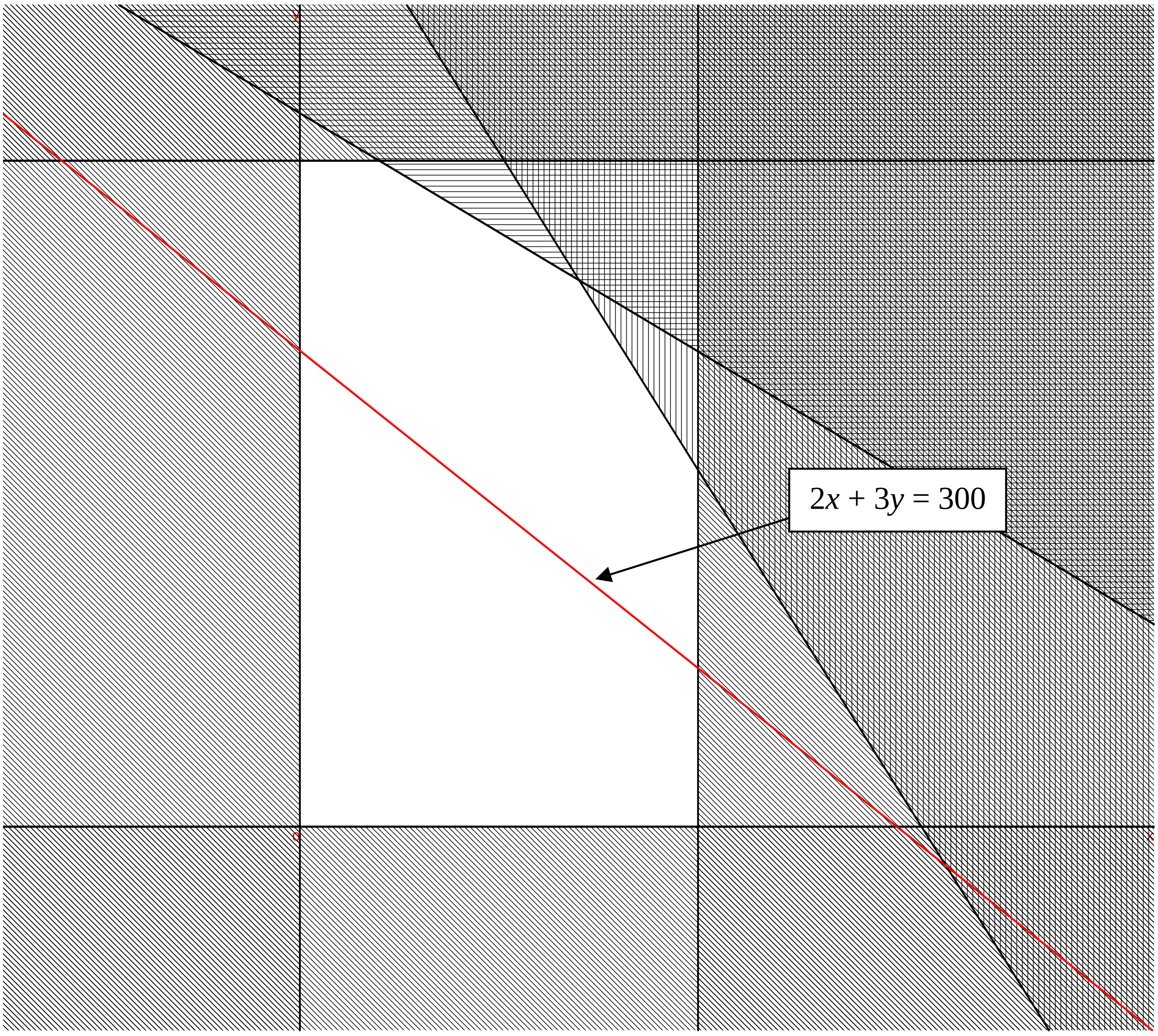
Le domaine des contraintes correspond au domaine de frontière polygonale obtenu à la première question.

→ *Question 2.c.*

Le bénéfice réalisé sur un téléviseur est de 200€, sur un magnétoscope de 300€. On en tire :

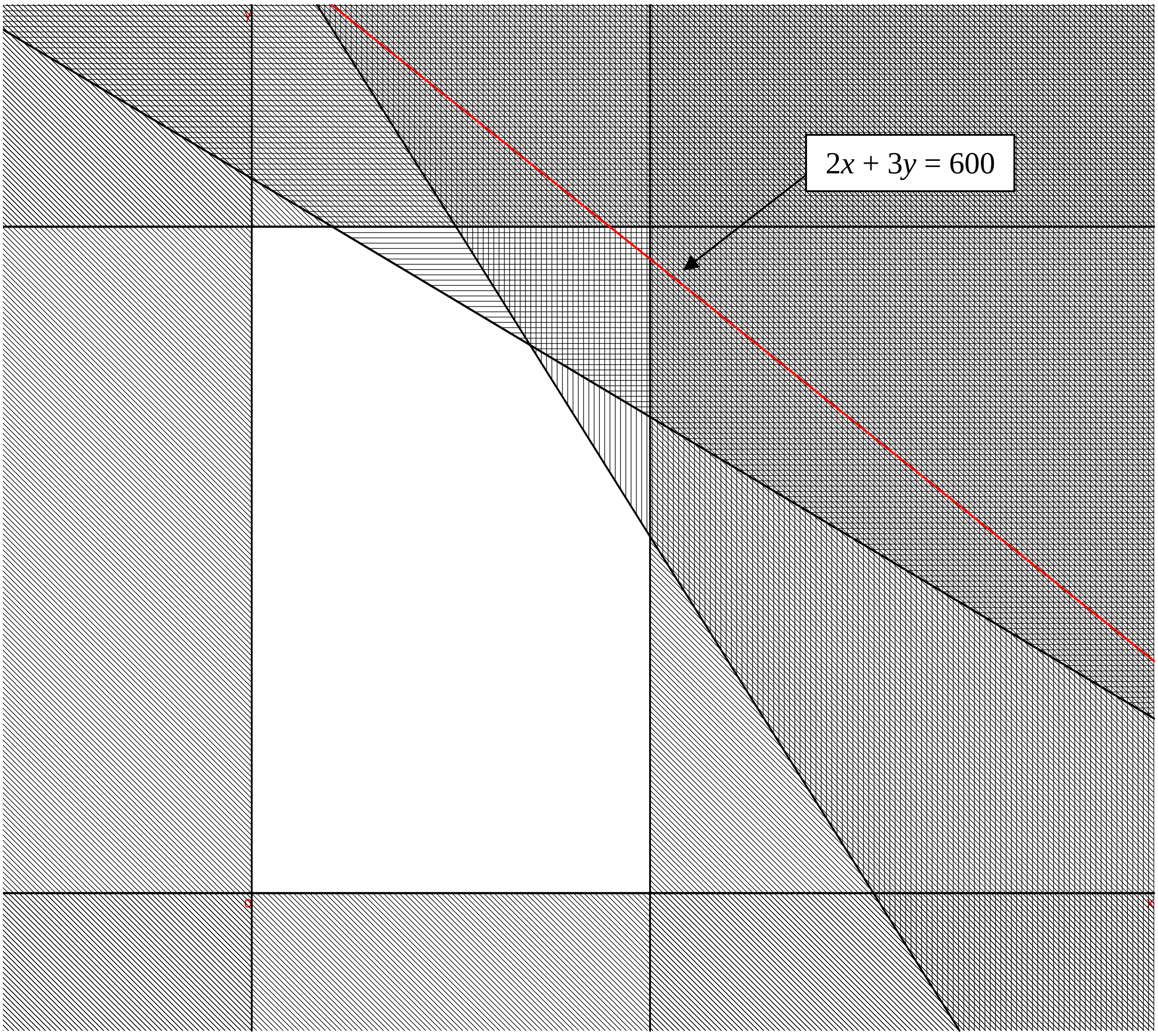
Pour une production totale de x téléviseurs et y magnétoscopes, le bénéfice total réalisé s'élèvera à : $200x + 300y$ euros.

L'entreprise pourra réaliser un bénéfice de 30 000€ s'il existe au moins un point M du domaine des contraintes dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient : $200x + 300y = 30000$.
On va donc tracer la droite d'équation : $2x + 3y = 300$. On obtient :



On constate, par lecture graphique, que la droite d'équation $2x+3y=300$ intercepte le domaine des contraintes. Un bénéfice de 30 000€ peut donc être réalisé par l'entreprise.

Nous adoptons la même démarche pour un bénéfice de 60 000€. Cette fois, il convient de représenter la droite d'équation : $2x+3y=600$. On obtient :



On constate cette fois que la droite d'équation $2x+3y=600$ n'intercepte pas le domaine des contraintes : un bénéfice de 60 000€ ne peut être réalisé par l'entreprise.

Finalement :

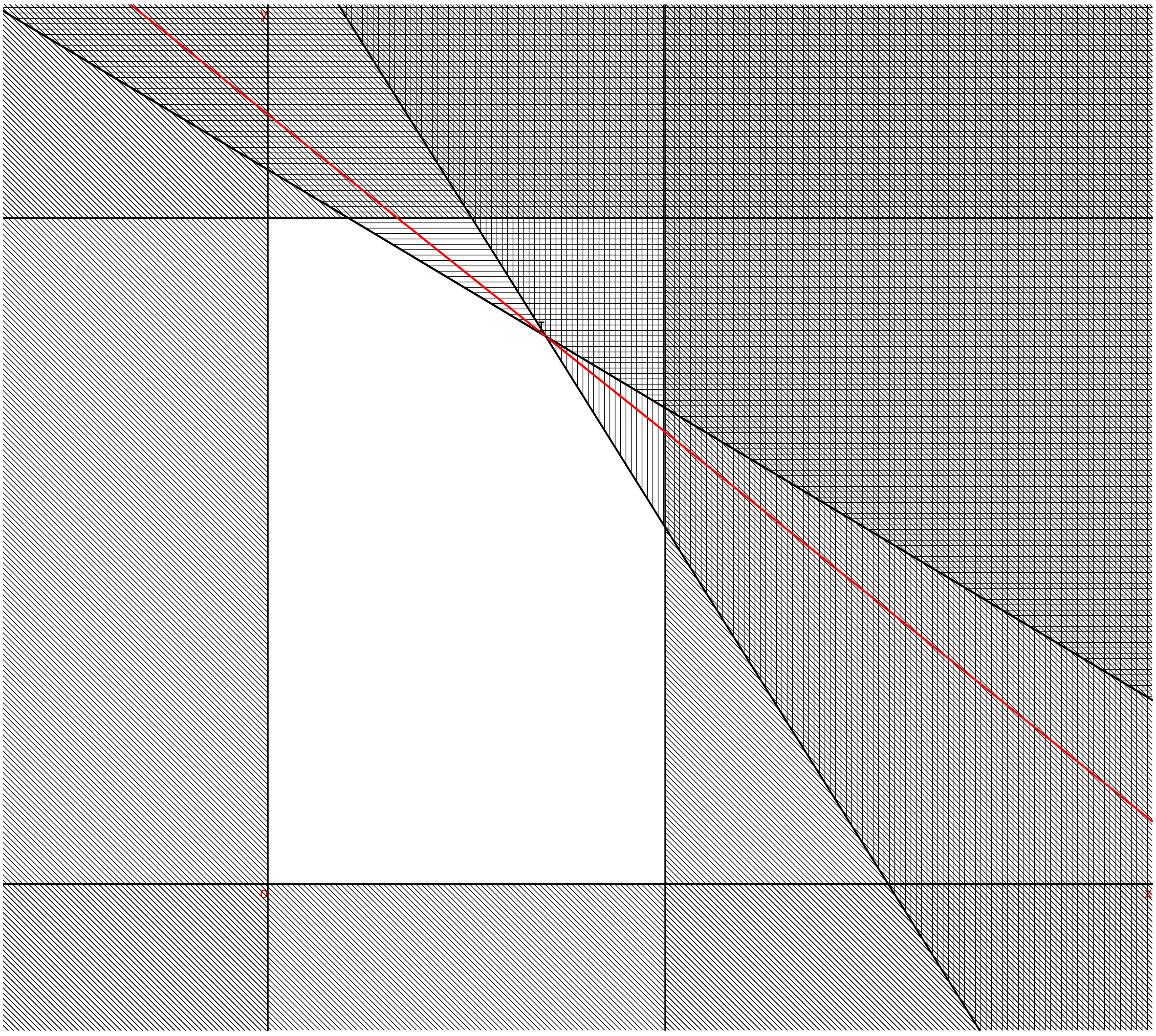
L'entreprise peut réaliser un bénéfice de 30 000€ mais pas un bénéfice de 60 000€.

→ *Question 2.d.*

Les productions permettant de réaliser un bénéfice B correspondent aux couples $(x; y)$ tels que $2x+3y=\mathrm{B}$. Graphiquement, on obtient une droite.
Lorsque B varie, on obtient une famille de droites parallèles puisqu'elles admettent toutes comme coefficient directeur $-\frac{2}{3}$ (l'équation réduite d'une telle droite s'écrit : $y=-\frac{2}{3}x+\frac{\mathrm{B}}{3}$).
Pour obtenir le bénéfice maximal, on va positionner sur le graphique précédent une droite d'équation $2x+3y=\mathrm{B}$ de telle sorte que :

- Son ordonnée à l'origine soit maximale (l'ordonnée à l'origine est proportionnelle au bénéfice réalisé) ;
- Elle intercepte le domaine des contraintes.

On obtient la droite (en rouge) ci-dessous :



Cette droite admet donc une équation de la forme $2x+3y=\mathrm{B}$ et passe par le point d'intersection I des droites d'équations $x+2y=300$ et $4x+3y=625$.

Pour déterminer les coordonnées de I, on résout donc le système :

$$\begin{cases} x+2y=300 \\ 4x+3y=625 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x+2y=300 \\ 4x+3y=625 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x=-2y+300 \\ 4x+3y=625 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x=-2y+300 \\ 4(-2y+300)+3y=625 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x=-2y+300 \\ 1200-5y=625 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x=-2y+300 \\ 5y=575 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x=-2y+300 \\ y=115 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x=-2\times 115+300 \\ y=115 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x=70 \\ y=115 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le point I admet donc comme coordonnées : $(70;115)$.

Le bénéfice correspondant s'élève à $200\times 70+300\times 115=14000+34500=48500$.

Finalement :

Le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximal lorsqu'elle produit 70 téléviseurs et 115 magnétoscopes. Il s'élève à 48 500€.