FRANCE METROPOLITAINE – Série S – 2001 – Exercice

Soit trois points de l'espace *A*, *B*, *C* non alignés et soit *k* un réel de l'intervalle $\left[-1,1\right]$.

On note G_k le barycentre du système $\left\{\left(A,k^2+1\right),\left(B,k\right),\left(C,-k\right)\right\}$.

1. Représentez les points *A*, *B*, *C*, le milieu *I* de $\left[BC\right]$ et construire les points G_1 et G_{-1}.
2. a) Montrer que pour tout réel *k* de l'intervalle $\left[-1,1\right]$, on a l'égalité :
$$\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$
   b) Etablir le tableau de variation de la fonction *f* définie sur $\left[-1,1\right]$ par $f\left(x\right)=-\frac{x}{x^2+1}$.
   c) En déduire l'ensemble des points G_k quand *k* décrit l'intervalle $\left[-1,1\right]$.

Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points *M* de l'espace tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$
4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$
5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
   Les points *A*, *B*, *C* ont pour coordonnées respectives $\left(0;0;2\right)$, $\left(-1;2;-1\right)$ et $\left(-1;2;5\right)$. Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.
   a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.
   b) Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$, intersection de E et F.

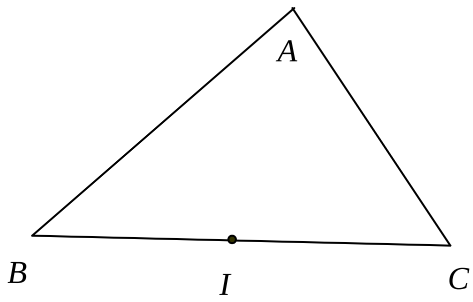
Analyse

Géométrie, analyse, manipulations de vecteurs … Voici les principaux ingrédients d'un exercice qui requiert de la rigueur dans les justifications.

Résolution

Question 1.

Plaçons d'abord sur une figure, pour fixer les idées, trois points *A*, *B* et *C* non alignés et *I*, milieu de $[BC]$:



Le point G_k, barycentre du système $\{(A,k^2+1),(B,k),(C,-k)\}$ est défini par la relation vectorielle suivante :

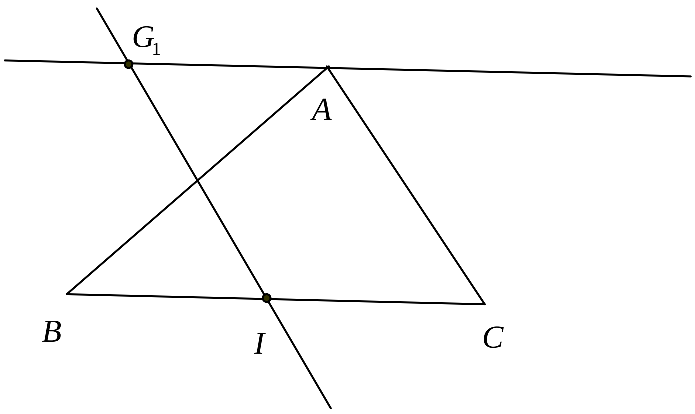
$$\left(k^2+1\right)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kB}-k\overrightarrow{G_kC}=\vec{0} \qquad (E)$$

En particulier, pour $k=1$, cette égalité s'écrit :

$$\begin{aligned}
&2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{CG_1}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IC}
\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du fait que, par construction, le point *I* est milieu de $[BC]$. Pour construire le point G_1, il convient, par exemple :

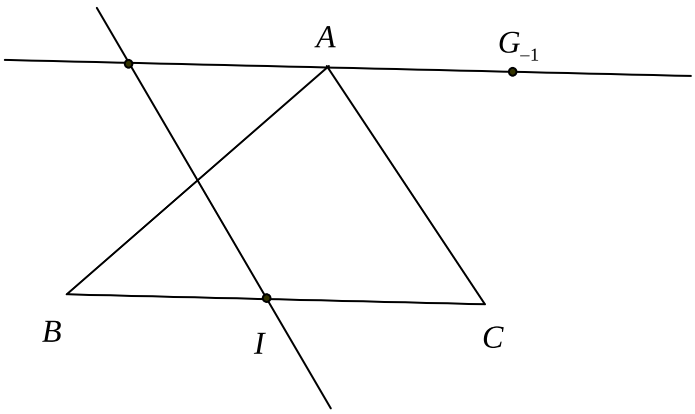
1. De mener par le point *A* la parallèle à la droite $D(B,C)$ puisque G_1 se trouvera sur cette droite ;
2. De mener par *I* la parallèle à la droite $D(A,C)$;
3. De considérer l'intersection de ces deux droites qui n'est autre que le point G_1 recherché.



Pour $k=-1$, l'égalité (E) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&2\overrightarrow{G_{-1}A}-\overrightarrow{G_{-1}B}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_{-1}A}+\overrightarrow{BG_{-1}}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_{-1}A}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{G_{-1}A}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CI}
\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{G_{-1}A}+\overrightarrow{G_1A}=\vec{0}$, A est le milieu du segment $\left[G_{-1}G_1\right]$. G_{-1} est donc le symétrique de G_1 par rapport à A. D'où, finalement :



Question 2.a.

Reprenons l'égalité (E) :

$$\left(k^2+1\right)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kB}-k\overrightarrow{G_kC}=\vec{0} \qquad (E)$$

On a :

$$k\overrightarrow{G_kB}-k\overrightarrow{G_kC}=k\left(\overrightarrow{G_kB}-\overrightarrow{G_kC}\right)=k\left(\overrightarrow{G_kB}+\overrightarrow{CG_k}\right)=k\overrightarrow{CB}$$

L'égalité (E) est donc équivalente à :

$$\begin{aligned}
&\left(k^2+1\right)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{G_kA}=\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

La division par k^2+1 est licite puisque l'on a : $\forall k\in[-1,1], k^2+1>0$.

On a bien :

$$\boxed{\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}}$$

Question 2.b.

On considère ici la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$.

Pour étudier ses variations sur $[-1,1]$, on peut avoir recours à la dérivée de f sur l'intervalle $]-1,1[$. En effet, sur $]-1,1[$, f est dérivable comme rapport de deux fonctions définies et dérivables.

Il vient : $f'(x)=\frac{-\left(x^2+1\right)+x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Or $x^2-1=(x+1)(x-1)$ donc pour tout x compris strictement entre –1 et 1, x^2-1 gardera un signe constant. Comme cette expression est négative pour $x=0$, par exemple, on en déduit : $\forall x\in]-1,1[, x^2-1<0$.

Comme, par ailleurs, on a : $\forall x\in]-1,1[, x^2+1>0$, il vient finalement : $\forall x\in]-1,1[, f'(x)<0$. La dérivée de f étant strictement négative sur $]-1,1[$, on en déduit que f est strictement décroissante sur cet intervalle. Le continuité de f sur l'intervalle $[-1,1]$ nous permet alors de conclure :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [-1,1]}$$

Question 2.c.

D'après la question précédente, on peut affirmer que *f* atteint son maximum sur $[-1,1]$ pour $x=-1$ et on a : $f(-1)=\frac{1}{2}$. Par ailleurs, *f* atteint son minimum sur $[-1,1]$ pour $x=1$ et on a : $f(1)=\frac{1}{2}$.

De surcroît, en tant que fonction continue strictement monotone, *f* définit une bijection de l'intervalle $[-1,1]$ dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Or, on a vu que : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$. C'est à dire : $\overrightarrow{AG_k}=f(k)\overrightarrow{BC}$.

On déduit de ce qui précède que lorsque *k* décrit $[-1,1]$, $f(k)$ décrit $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
et le point G_k décrit le segment $[G_{-1}G_1]$.

Question 3.

Introduisons, dans chaque expression vectorielle un point G_k :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}&=2\left(\overrightarrow{MG_k}+\overrightarrow{G_kA}\right)+\left(\overrightarrow{MG_k}+\overrightarrow{G_kB}\right)-\left(\overrightarrow{MG_k}+\overrightarrow{G_kC}\right)\\&=\left(2\overrightarrow{MG_k}+\overrightarrow{MG_k}-\overrightarrow{MG_k}\right)+\left(2\overrightarrow{G_kA}+\overrightarrow{G_kB}-\overrightarrow{G_kC}\right)\\&=2\overrightarrow{MG_k}+\left(2\overrightarrow{G_kA}+\overrightarrow{G_kB}-\overrightarrow{G_kC}\right)\end{aligned}$$

En choisissant $k=1$, on a : $2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$ et il vient finalement :

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_1}$$

De façon analogue, on établit :

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_{-1}}$$

L'égalité : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ est donc équivalente à $\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$ ou, finalement :

$$\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$$

L'ensemble E cherché est donc l 'ensemble des points *M* se trouvant à égale distance des points G_1 et G_{-1}. C'est le plan orthogonal à la droite $D(G_{-1},G_1)$ passant par *A*.

Question 4.

Cette question se traite de façon analogue à la précédente.

On a à nouveau : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_1}$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_1}&=\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)-2\overrightarrow{MC}\\&=2\overrightarrow{MG_{-1}}-2\overrightarrow{MC}\\&=2\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MG_{-1}}\right)\\&=2\overrightarrow{CG_{-1}}\end{aligned}$$

L'égalité : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ est donc équivalente à $\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|2\overrightarrow{CG_{-1}}\right\|$.

C'est à dire, finalement :

$$\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{CG_{-1}}\right\|$$

Or, les points C et G_{-1} étant fixés, la norme $\left\|\overrightarrow{CG_{-1}}\right\|$ l'est aussi. L'égalité précédente désigne donc l'ensemble des points qui se situent à la distance $\left\|\overrightarrow{CG_{-1}}\right\|$ de G_1. Il s'agit donc de la sphère de centre G_1 et de rayon $\left\|\overrightarrow{CG_{-1}}\right\|$:

$$\boxed{\mathrm{F}=S\left(G_1,\left\|\overrightarrow{CG_{-1}}\right\|\right)}$$

Question 5.a.

On considère ici les points $A\begin{vmatrix}0\\0\\2\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}-1\\2\\1\end{vmatrix}$ et $C\begin{vmatrix}-1\\2\\5\end{vmatrix}$.

Le point G_1 est parfaitement défini par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{G_1A}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IC}$$

On a : $\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}-1-(-1)=0\\2-2=0\\5-1=4\end{vmatrix}$ d'où : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}0\\0\\2\end{vmatrix}$. Par ailleurs, en posant : $G_1\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$, on a : $\overrightarrow{G_1A}\begin{vmatrix}-x\\-y\\2-z\end{vmatrix}$.

L'égalité vectorielle ci-dessus se traduit donc par le système suivant :

$$\begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \\ 2 - z = 2 \end{cases}$$

qui donne simplement : $x = y = z = 0$:

G_1 est confondu avec l'origine.

De façon analogue, à partir de $\overrightarrow{G_{-1}A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et en posant $G_{-1}\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$, on obtient : $\overrightarrow{G_1A}\begin{vmatrix} -X \\ -Y \\ 2-Z \end{vmatrix}$ et il vient :

$$\overrightarrow{G_{-1}A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y = 0 \\ 2 - Z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y = 0 \\ Z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow G_{-1}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{G_{-1}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix}}$$

Nous avons vu que l'ensemble E était l'ensemble des points situés à égal distance des points G_1 et G_{-1} : $\mathrm{E} = \left\{ M / \left\| \overrightarrow{MG_1} \right\| = \left\| \overrightarrow{MG_{-1}} \right\| \right\}$. Cette distance est minimale au point A, milieu de $[G_{-1}G_1]$ et vaut, ici : $\left\| \overrightarrow{AG_1} \right\| = \left\| \overrightarrow{AG_{-1}} \right\| = \left\| 2\vec{k} \right\| = 2$.

Par ailleurs, on a $\mathrm{F} = \left\{ M / \left\| \overrightarrow{MG_1} \right\| = \left\| \overrightarrow{CG_{-1}} \right\| \right\}$. Ici, on a : $\overrightarrow{CG_{-1}}\begin{vmatrix} 0-(-1)=1 \\ 0-2=-2 \\ 4-5=-1 \end{vmatrix}$.

D'où : $\left\| \overrightarrow{CG_{-1}} \right\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} > 2$.

La distance du plan E au centre G_1 de la sphère F est donnée par $\left\| \overrightarrow{AG_1} \right\| = 2$ puisque, par construction, la droite $D(A, G_1)$ est orthogonale à E et que A appartient à E. Or cette distance est inférieure au rayon de la sphère F qui vaut $\sqrt{6}$. On en tire que le plan E et la sphère F sont sécants. Leur intersection est un cercle (intersection classique d'un plan et d'une sphère).

Le plan E et la sphère F sont sécants et leur intersection est un cercle.

Question 5.b.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle intersection de E et F. Nous allons d'abord montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle de centre A.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$.

On a : $\overrightarrow{G_1M} = \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AM}$. Or, par définition du plan E, les vecteurs $\overrightarrow{G_1A}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux. Il vient donc : $\left\|\overrightarrow{G_1M}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{G_1A}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2$. Or tout point M de C est à distance constante de G_1 en tant que point de F. On a donc : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{G_1M}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{G_1A}\right\|^2 = \text{constante}$. En d'autres termes, tous les points de C sont à égale distance de A. A est donc le centre de $\mathcal{C}$.

En utilisant les valeurs numériques : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{G_1M}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{G_1A}\right\|^2 = 6 - 4 = 2$.

Le cercle $\mathcal{C}$ a donc un rayon de $\sqrt{2}$.