INDE – Série S – Avril 1998 – Exercice

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
$$P(z) = \left(z^2 + az + b\right)\left(z^2 + 4z + 20\right)$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer, dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les images *M*, *N*, *P* et *Q* des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i$, $n = -2 - 4i$, $p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.
4. a) Déterminer le nombre complexe *z* vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m} = i$.

   Placer son image *K*.

   a) En déduire que le triangle *MPK* est isocèle rectangle en *K*.
5. a) Déterminer par le calcul l'affixe du point *L*, quatrième sommet du carré *MKPL*.

   b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection *R* de la droite *(KL)* et de l'axe des abscisses.

   c) Montrer que *M*, *N*, *P* et *Q* sont sur un même cercle de centre *R*.

Analyse

Cet exercice propose une étude géométrique intéressante des racines complexes d'un polynôme du troisième degré à coefficients réels.

Résolution

→ *Question 1.*

On cherche ici deux réels *a* et *b* tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260 = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20)$$

On a : $(z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20) = z^4 + (4+a)z^3 + (20 + 4a + b)z^2 + (20a + 4b)z + 20b$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260 = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20) \\
&\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, z^4 + 17z^2 - 28z + 260 = z^4 + (4+a)z^3 + (20 + 4a + b)z^2 + (20a + 4b)z + 20b \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + a = 0 & (1) \\ 20 + 4a + b = 17 & (2) \\ 20a + 4b = -28 & (3) \\ 20b = 260 & (4) \end{cases}
\end{aligned}$$

L'égalité (1) fournit $a = -4$ et l'égalité (4) : $b = 13$.
On a alors : $20 + 4a + b = 20 - 16 + 13 = 17$ et $20a + 4b = -80 + 52 = -28$. Les égalités (2) et (3) sont donc vérifiées pour ces valeurs de *a* et *b* qui sont ainsi les seules solutions possibles.

En conclusions, on a :

$$\boxed{P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260 = (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20)}$$

→ *Question 2.*

D'après ce qui précède, on a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 4z + 13 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 4z + 20 = 0 \end{cases}$$

Il convient donc de résoudre deux équations du second degré.

Résolution de $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Le discriminant réduit s'écrit : $\Delta' = (-2)^2 - 13 = 4 - 13 = -9 = (3i)^2$.
Les deux racines de cette équations sont donc :

$$z_1 = 2 - 3i$$
$$z_2 = 2 + 3i$$

Résolution de $z^2 + 4z + 20 = 0$.

Le discriminant réduit s'écrit : $\Delta' = 2^2 - 20 = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$
Les deux racines de cette équations sont donc :

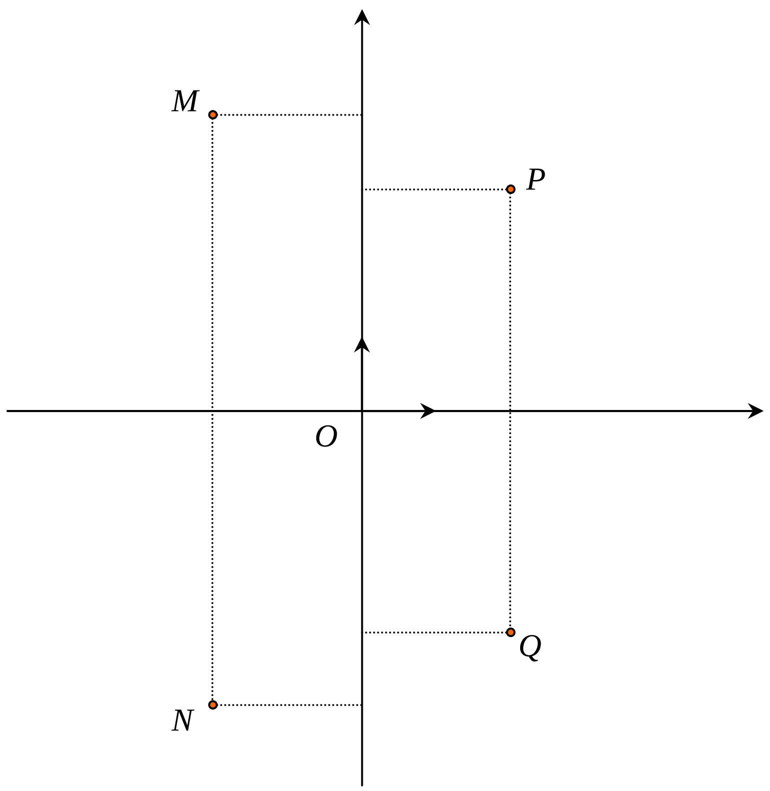
$$z_3 = -2 - 4i$$
$$z_4 = -2 + 4i$$

Il vient donc, finalement :

$$\boxed{P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{2 - 3i, -2 - 3i, -2 + 4i, -2 - 4i\}}$$

Remarque : les coefficients du polynôme P sont réels, on obtient bien des racines conjuguées (z_1 et z_2, d'une part ; z_3 et z_4, d'autre part).

→ *Question 3.*



→ *Question 4.a.*

On cherche le nombre complexe z vérifiant : $\dfrac{z-p}{z-m}=i$.

On a :

$$\frac{z-p}{z-m}=i \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq m \\ z-p=i(z-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq m \\ z-p=iz-im \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq m \\ (1-i)z=p-im \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq m \\ z=\dfrac{p-im}{1-i} \end{cases}$$

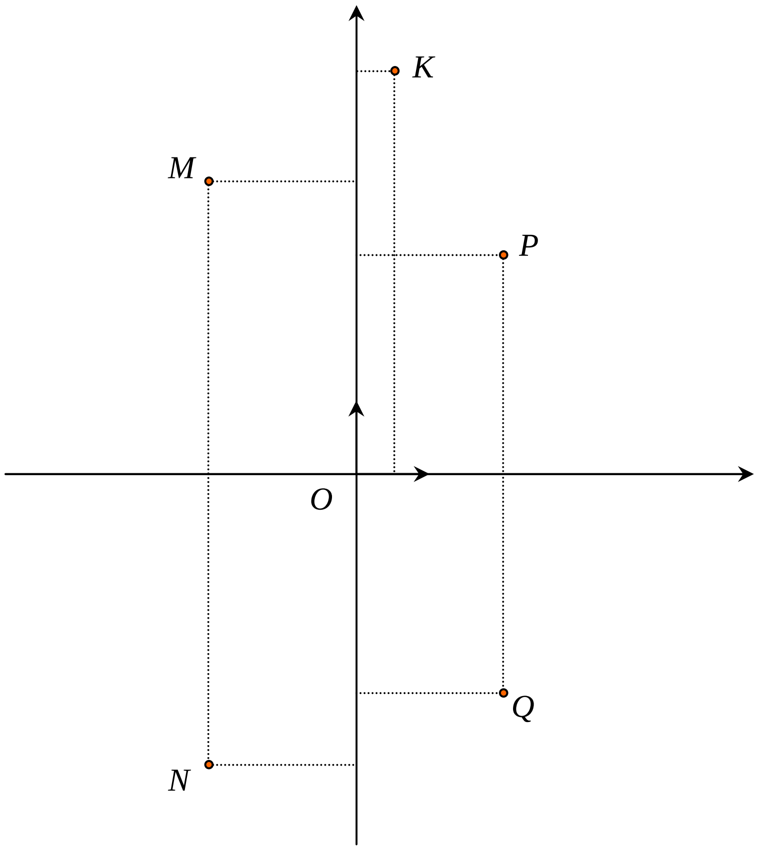
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\neq m \\ z=\dfrac{(p-im)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq m \\ z=\dfrac{1}{2}\big((p+m)+i(p-m)\big) \end{cases}$$

Avec $m=-2+4i$ et $p=2+3i$, il vient :

$$z=\frac{1}{2}\big((p+m)+i(p-m)\big)=\frac{1}{2}\big((2+3i-2+4i)+i(2+3i+2-4i)\big)=\frac{1}{2}\big(7i+i(4-i)\big)=\boxed{\frac{1}{2}(1+11i)}$$

Le nombre obtenu est différent de m et on a donc :

$$\boxed{\frac{z-p}{z-m}=i \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}(1+11i)}$$



→ *Question 4.b.*

D'après la question précédente, posons $k=\frac{1}{2}(1+11i)$.

Le nombre complexe k vérifie : $\frac{k-p}{k-m}=i$.

En considérant les modules de chacun des membres de cette égalité, on a :

$$\frac{k-p}{k-m}=i \Rightarrow \left|\frac{k-p}{k-m}\right|=|i| \Leftrightarrow \frac{|k-p|}{|k-m|}=1 \Leftrightarrow |k-p|=|k-m| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{PK}\right\|=\left\|\overrightarrow{MK}\right\|$$

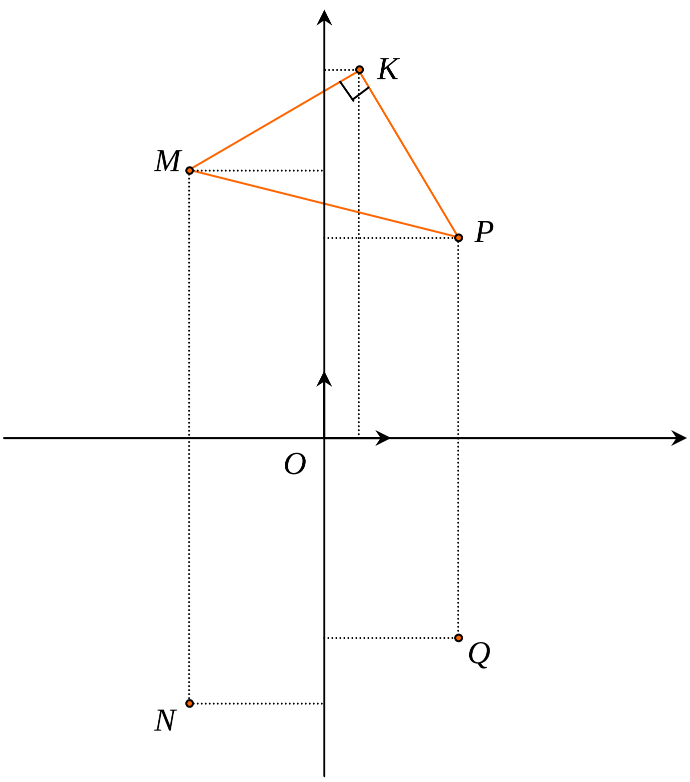
La dernière égalité traduit le fait que <u>le triangle *MPK* est isocèle de sommet principal *K*</u>.

En considérant cette fois les arguments, on a :

$$\frac{k-p}{k-m}=i \Rightarrow \arg\left(\frac{k-p}{k-m}\right)=\arg(i) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MK},\overrightarrow{PK}\right)=\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z})$$

Comme $\left(\overrightarrow{MK},\overrightarrow{PK}\right)=\left(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KP}\right)$, on déduit de l'égalité précédente que les vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KP}$ sont orthogonaux. <u>Le triangle *MPK* est donc rectangle en *K*</u>.

Le triangle *MPK* est isocèle rectangle en *K*.



→ *Question 5.a.*

On cherche l'affixe l du point L, quatrième sommet du carré $MPKL$.

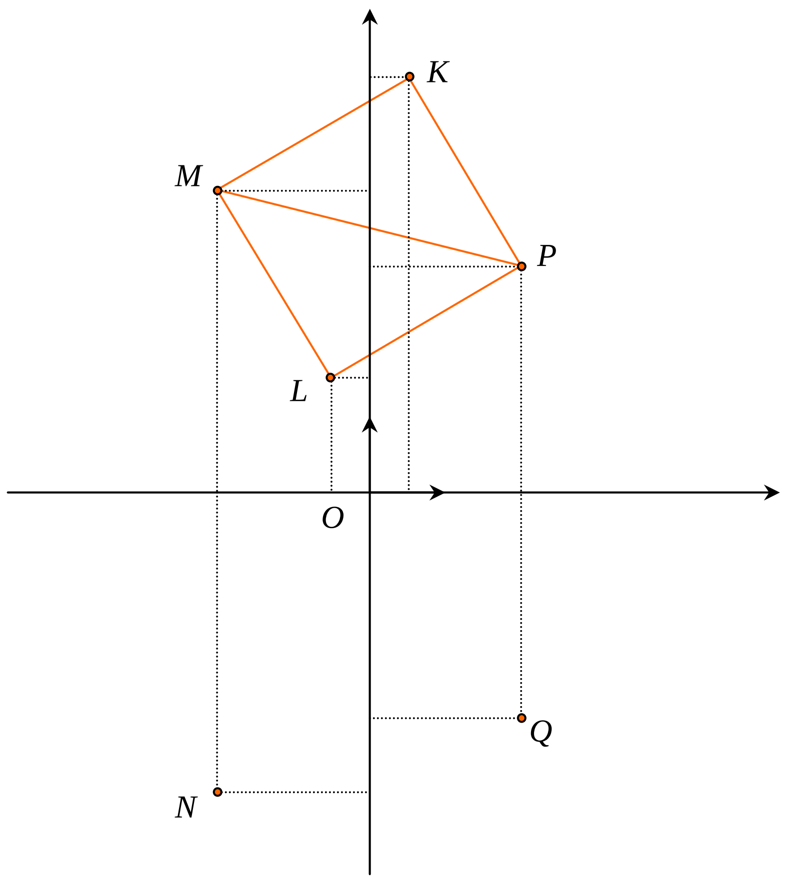
Puisque le triangle MPK est rectangle en K, $[KP]$ et $[KM]$ sont deux côtés consécutifs du carré $MPKL$. Les diagonales du carré seront donc (PM) et (KL). Les segments $[PM]$ et $[KL]$ doivent se couper en leur milieu (caractéristique d'un rectangle et, en particulier, d'un carré).

On doit donc avoir : $\frac{1}{2}(p+m)=\frac{1}{2}(k+l)$.

C'est à dire : $l = p+m-k = 2+3i-2+4i-\frac{1}{2}-\frac{11}{2}i = -\frac{1}{2}+\left(7-\frac{11}{2}\right)i = \boxed{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}$

$$\boxed{l=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}$$

On a placé le point L sur la figure ci-dessous :



→ *Question 5.b.*

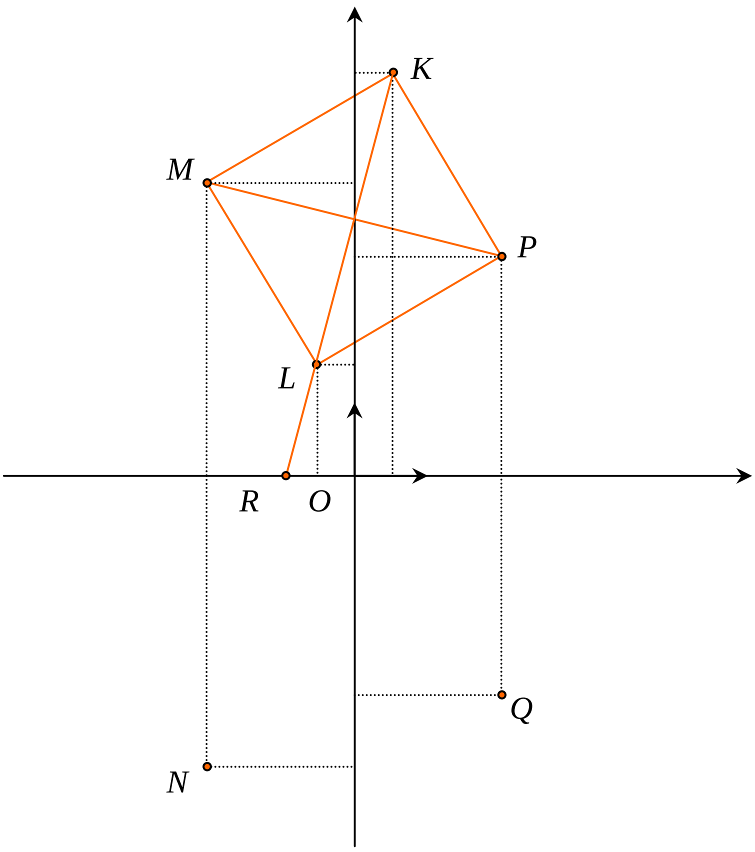
On cherche maintenant l'abscisse du point R, intersection de l'axe des abscisses et de la droite (KL). Nous posons donc : $R\begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}$.

Les points R, K et L doivent être alignés. En d'autres termes les vecteurs $\overrightarrow{RK}$ et $\overrightarrow{KL}$ doivent être colinéaires. On doit donc avoir : $\det\left(\overrightarrow{RK},\overrightarrow{KL}\right)=0$.

A partir des coordonnées des points K et L, on obtient : $\overrightarrow{RK}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-x \\ \frac{11}{2} \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$. On a alors :

$$\det\left(\overrightarrow{RK},\overrightarrow{KL}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-x & -1 \\ \frac{11}{2} & -4 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -2+4x+\frac{11}{2}=0 \Leftrightarrow 4x=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{7}{8}}$$

Le point R a pour coordonnées $\left(-\frac{7}{8},0\right)$.



→ *Question 5.c.*

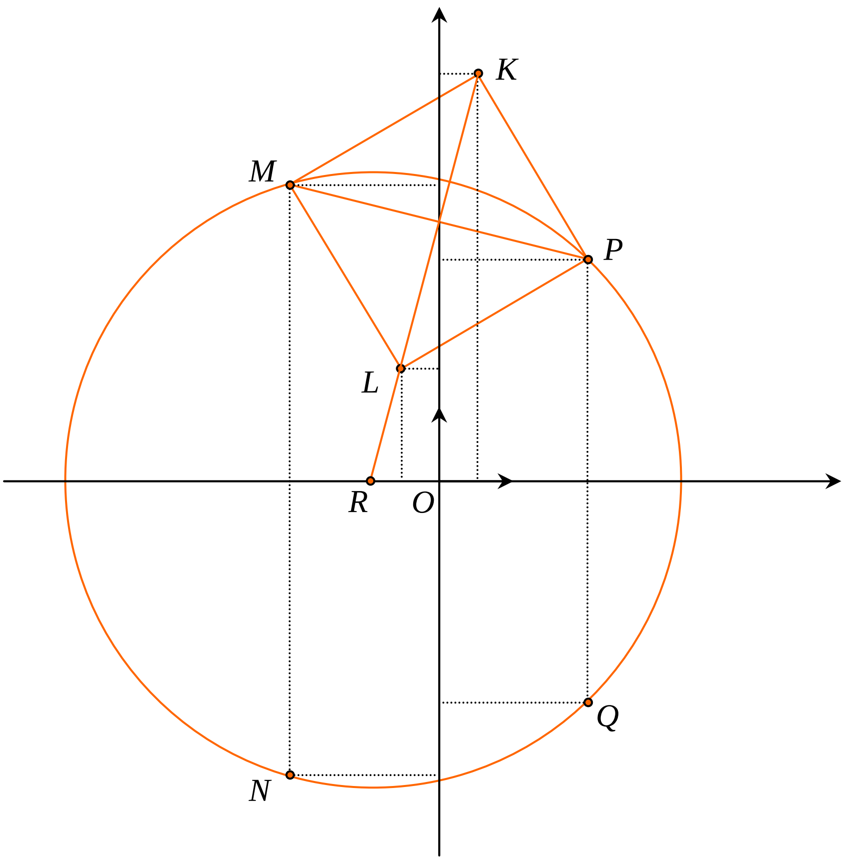
Montrons que les points M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

On peut bien sûr calculer les distances des points M, N, P et Q au point R et constater qu'elles sont égales. On peut néanmoins éviter ces quatre calculs en faisant quelques remarques …

D'une part, les points P et Q ont des affixes conjuguées. Géométriquement, cela signifie que l'axe des abscisses est la médiatrice du segment $[PQ]$. R se trouvant sur cet axe, on en tire : $\|\overrightarrow{RP}\| = \|\overrightarrow{RQ}\|$. De la même façon, on montre que l'on a : $\|\overrightarrow{RM}\| = \|\overrightarrow{RN}\|$.

Mais on sait également que le point R appartient à la droite (KL). Or cette droite est l'une des deux diagonales du carré $MKPL$. C'est donc la médiatrice du segment $[MP]$. On en déduit donc : $\|\overrightarrow{RM}\| = \|\overrightarrow{RP}\|$.

Les trois égalités obtenues donnent : $\|\overrightarrow{RQ}\| = \|\overrightarrow{RP}\| = \|\overrightarrow{RM}\| = \|\overrightarrow{RN}\|$. On en conclut que <u>les points M, N, P et Q appartiennent à un même cercle de centre R</u> (voir figure ci-dessous).



A titre de complément, nous pouvons calculer le rayon de ce cercle. Considérons, par exemple, les points $R\left|\begin{matrix} -\frac{7}{8} \\ 8 \\ 0 \end{matrix}\right.$ et $M\left|\begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix}\right.$. On a donc : $\overrightarrow{RM}\left|\begin{matrix} -\frac{9}{8} \\ 4 \end{matrix}\right.$.

D'où :

$$\left\|\overrightarrow{RM}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{9}{8}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{81}{64}+16} = \frac{1}{8}\sqrt{81+16\times 64} = \frac{1}{8}\sqrt{1105}$$

En conclusion :

Les points *M*, *N*, *P* et *Q* appartiennent au cercle de centre *R* et de rayon $\rho = \frac{1}{8}\sqrt{1105}$.