

1. Pour tout nombre complexe Z , on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

- a. Factoriser $P(Z)$.
- b. En déduire les solutions dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z .
- c. Déduire de la question précédente les solutions dans \mathbb{C} de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1} \right)^4 = 1$$

2. a. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (l'unité graphique est 5 cm).

Placer les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = -2, \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

- b. Démontrer que les points O , A , B et C sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.

Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Analyse

Cet exercice propose en fait une étude géométrique intéressante des racines complexes d'un polynôme du troisième degré à coefficients réels.

Résolution

→ *Question 1.a.*

Soit $P(Z) = Z^4 - 1$.

On a, en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, valable pour tout couple (a, b) de nombres complexes :

$$Z^4 - 1 = (Z^2)^2 - 1 = (Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = (Z^2 - 1^2)(Z^2 - i^2) = (Z - 1)(Z + 1)(Z - i)(Z + i)$$

D'où, finalement :

$$Z^4 - 1 = (Z - 1)(Z + 1)(Z - i)(Z + i)$$

→ *Question 1.b.*

A partir du résultat obtenu à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} P(Z) &= 0 \\ \Leftrightarrow Z^4 - 1 &= (Z - 1)(Z + 1)(Z - i)(Z + i) = 0 \\ \Leftrightarrow Z &= 1 \text{ ou } Z = -1 \text{ ou } Z = i \text{ ou } Z = -i \end{aligned}$$

Soit :

$$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z \in \{1, -1, i, -i\}$$

→ *Question 1.c.*

On considère maintenant l'équation : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ (E).

Afin d'utiliser les résultats précédemment obtenus, nous introduisons une nouvelle inconnue Z définie comme suit : $Z = \frac{2z+1}{z-1}$. L'équation (E) se réécrit alors : $Z^4 = 1$, soit : $P(Z) = 0$.

Nous en connaissons les solutions qui sont au nombre de quatre. Pour chacune d'elle, nous utilisons l'égalité $Z = \frac{2z+1}{z-1}$ qui nous fournit, éventuellement, des solutions de (E) dont l'inconnue est z .

→ Solution $Z = 1$

$$\text{On a : } Z = 1 \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 2z+1 = z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = -2}$$

→ Solution $Z = -1$

$$\text{On a : } Z = -1 \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 2z+1 = -z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = 0}$$

→ Solution $Z = i$

On a :

$$\begin{aligned} Z = i &\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = i \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 2z+1 = i(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 2z+1 = iz-i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ (2-i)z = -1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z = -\frac{1+i}{2-i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z = -\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z = -\frac{1+3i}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i} \end{aligned}$$

→ Solution $Z = -i$

On a :

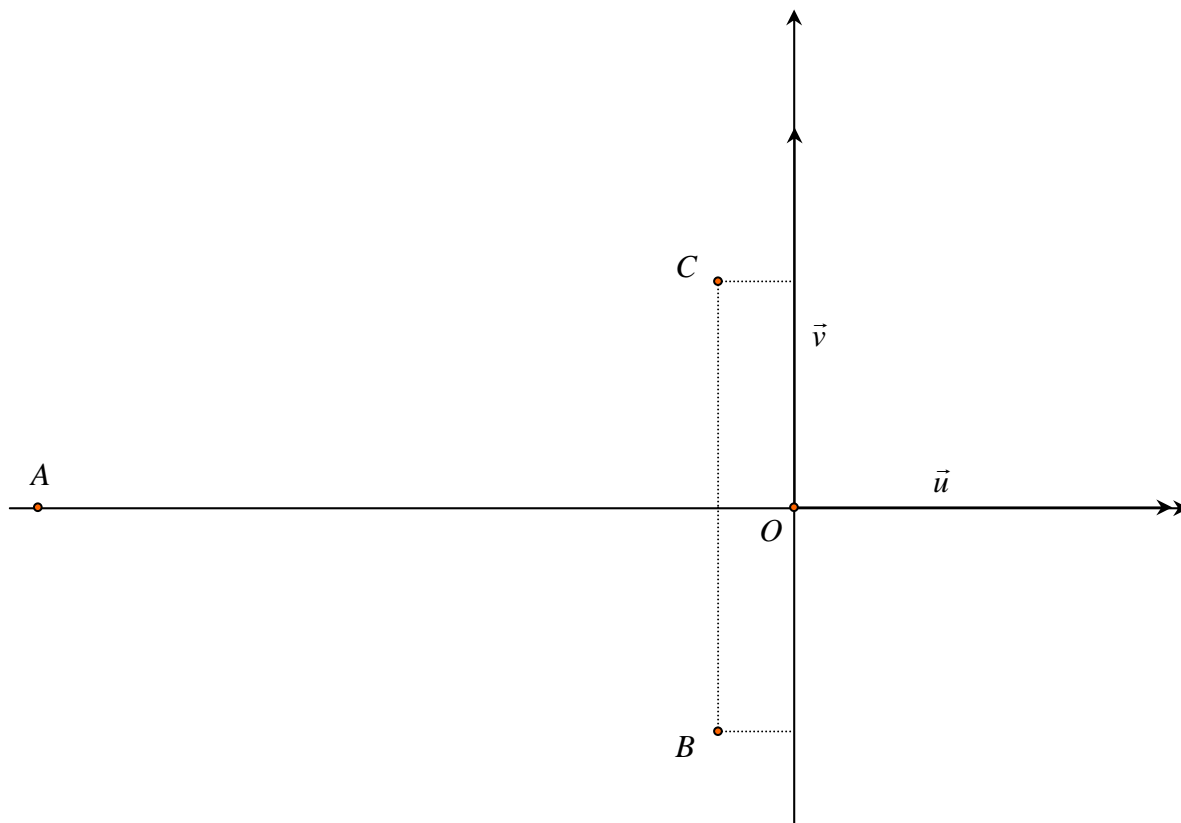
$$\begin{aligned} Z = -i &\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = -i \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 2z+1 = -i(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 2z+1 = -iz+i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ (2+i)z = -1+i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z = \frac{-1+i}{2+i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z = \frac{(-1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z = \frac{-1+3i}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i} \end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow z \in \left\{-2, 0, -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i, -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$$

→ Question 2.a.

Les affixes des points à placer correspondent aux solutions non nulles de l'équation (E).



→ Question 2.b.

Montrons que les points O , A , B et C sont situés sur un même cercle.

Les affixes des points B et C étant conjuguées et A étant situé sur l'axe des abscisses, on en déduit que les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont également conjugués.

Il vient alors : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$. Le triangle ABC est donc isocèle.

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC se trouve donc sur la hauteur issue du sommet principal, A , de ce triangle, c'est à dire sur l'axe des abscisses.

Si les points O , A , B et C se trouvent sur un même cercle, celui-ci est, en particulier, le cercle circonscrit au triangle ABC et son centre Ω se situe donc sur l'axe des abscisses.

Dans ces conditions, A et B sont diamétralement opposés et Ω est leur milieu. L'affixe de Ω vaut alors : $\omega = \frac{1}{2}(-2+0) = -1$.

En d'autres termes, si les points O , A , B et C sont sur un même cercle, alors son centre est le point $\Omega(-1)$. Il suffit donc de vérifier que l'on a : $\Omega O = \Omega A = \Omega B = \Omega C$.

Par construction, on a : $\Omega O = \Omega A$. Comme $OA = 2$, on en déduit : $\Omega O = \Omega A = 1$.

Comme Ω est situé sur l'axe des abscisses, médiatrice de $[BC]$, on a : $\Omega B = \Omega C$.

Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que l'on a : $\Omega B = 1$ (ou $\Omega C = 1$).

Le point B a pour affixe : $b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega B}$ vaut donc : $-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i - (-1) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$.

Il vient alors :

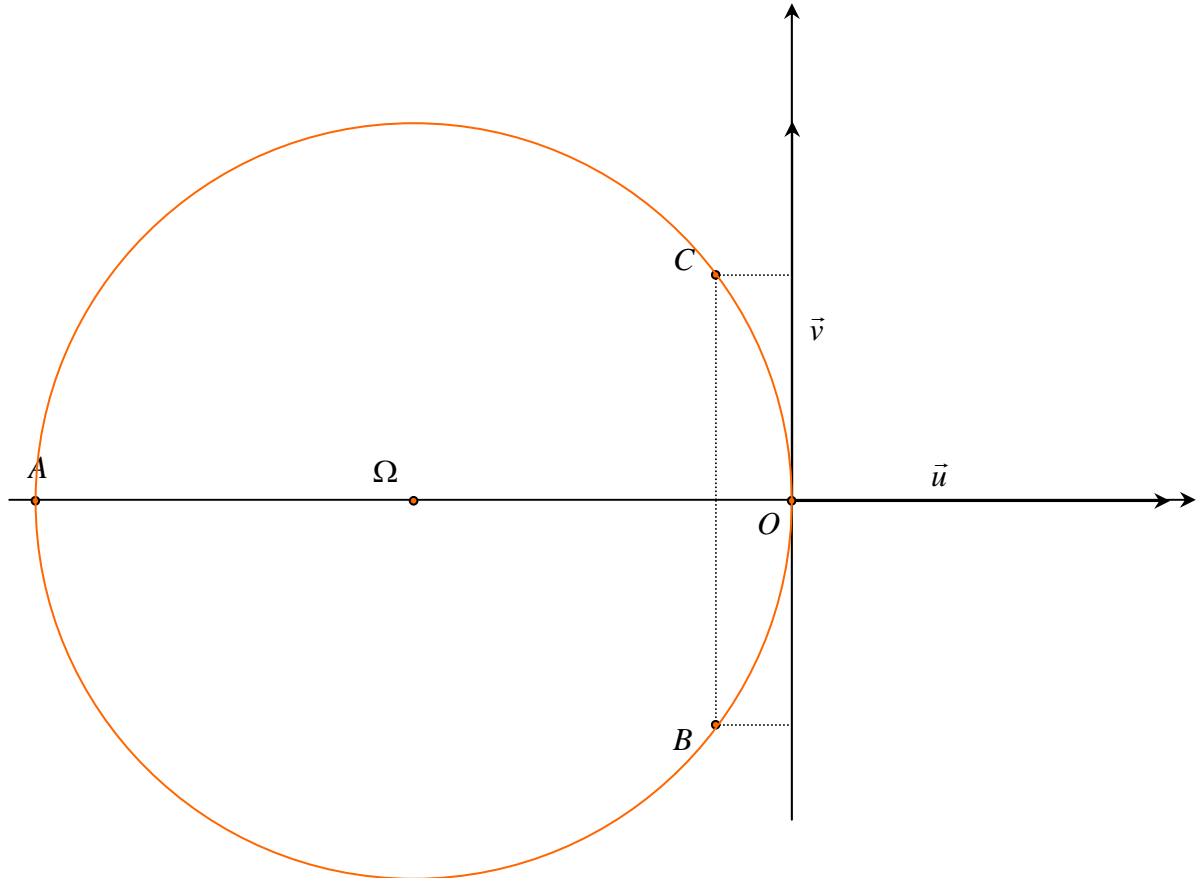
$$\Omega B = \|\overrightarrow{\Omega B}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{16+9} = \frac{1}{5}\sqrt{25} = 1$$

On a bien $\Omega B = \Omega C = 1$.

En conclusion :

Les points A , B , C et O appartiennent tous au cercle de centre $\Omega(-1)$ et de rayon $\rho = 1$.

Nous avons fait apparaître ce cercle et son centre sur la figure ci-après.



On pouvait également obtenir les résultats précédents en procédant comme suit :

Considérons l'angle $(\overline{CO}, \overline{CA})$.

Pour en obtenir une mesure, on considère le complexe : $\frac{a-c}{0-c} = \frac{a-c}{c} = \frac{a}{c} - 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} - 1 &= \frac{-2}{-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i} - 1 = \frac{10}{1-3i} - 1 = \frac{9+3i}{1-3i} = 3 \frac{3+i}{1-3i} = 3 \frac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} \\ &= 3 \frac{3+9i+i-3}{10} = 3 \frac{10i}{10} = \boxed{3i} \end{aligned}$$

On a donc : $\arg\left(\frac{a-c}{0-c}\right) = (\overline{CO}, \overline{CA}) = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que le triangle ACO est rectangle en C . Or, le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est situé au milieu de son hypoténuse, c'est à dire, ici, au milieu du segment $[AO]$.

De façon similaire (il est inutile de refaire les calculs !), le triangle ABO est rectangle en B et le centre du cercle qui lui est circonscrit se trouve au milieu de $[AO]$.

On déduit de ce qui précède que les deux cercles circonscrits considérés sont confondus et donc que les points A, B, C et O se trouvent sur un même cercle dont le centre est le milieu du segment $[AO]$.

Question 3.

Soit $z' = \frac{a-c}{d-c}$ où $d = -\frac{1}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned} z' = \frac{a-c}{d-c} &= \frac{-2 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)}{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)} = \frac{\frac{1}{5}(-10 + 1 - 3i)}{\frac{1}{10}(-5 + 2 - 6i)} = 2 \frac{-9 - 3i}{-3 - 6i} = 2 \frac{3+i}{1+2i} \\ &= 2 \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2}{5}(3 - 6i + i + 2) = \frac{2}{5}(5 - 5i) = \boxed{2(1-i)} \end{aligned}$$

On a alors : $z' = 2(1-i) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

$$z' = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

On a : $\frac{CA}{CD} = \frac{\|\overline{CA}\|}{\|\overline{CD}\|} = \frac{|a-c|}{|d-c|} = \left| \frac{a-c}{d-c} \right| = |z'|$. Or, d'après ce qui précède, on a : $|z'| = 2\sqrt{2}$.

On en déduit finalement :

$$\frac{CA}{CD} = 2\sqrt{2}$$

Par ailleurs, comme $z' = \frac{a-c}{d-c}$, on a $\arg(z') = \arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = (\overline{CD}, \overline{CA})$.

Or, un argument de z' est, d'après la forme trigonométrique obtenue ci-dessus, $-\frac{\pi}{4}$. On en

tire donc que l'angle des vecteurs \overline{CD} et \overline{CA} vaut $-\frac{\pi}{4}$.

$$(\overline{CD}, \overline{CA}) = -\frac{\pi}{4}$$

