France métropolitaine – Septembre 2007 – Série S - Exercice

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$
$$z_2 = 2 + 2i$$
$$Z = \frac{z_1}{z_2}$$

a) Ecrire Z sous forme algébrique.

b) Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.

c) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2,5 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z.

Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

d) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Analyse

Un exercice intéressant où de nombreuses notions relatives aux complexes sont passées en revue. Un peu de géométrie également au menu …

Résolution

→ *Question a.*

On a :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1+i} = \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}}{1+1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

→ *Question b.*

On a : $|z_1|^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2 = 2+6 = 8$. D'où : $\boxed{|z_1| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$.

On peut alors écrire :

$$z_1 = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}} + i\frac{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{3}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

D'où : $\boxed{\arg z_1 = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)}$.

De façon analogue : $|z_2|^2 = |2(1+i)|^2 = 2^2\left(1^2+1^2\right) = 2\times 2^2$. D'où : $\boxed{|z_2| = 2\sqrt{2} = |z_1|}$.

On a alors :

$$z_2 = 2\sqrt{2}\,\frac{2+i2}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

D'où : $\boxed{\arg z_2 = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)}$.

Comme $Z = \frac{z_1}{z_2}$, on a :

$$|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$$

Et :

$$\arg Z = \arg z_1 - \arg z_2 \ \ (2\pi) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \ \ (2\pi) = \frac{\pi}{12} \ \ (2\pi)$$

Finalement :

$$\boxed{|Z| = 1} \text{ et } \boxed{\arg Z = \frac{\pi}{12} \ \ (2\pi)}$$

Mais nous avons obtenu à la question a) : $Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Nous en déduisons alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}}$$

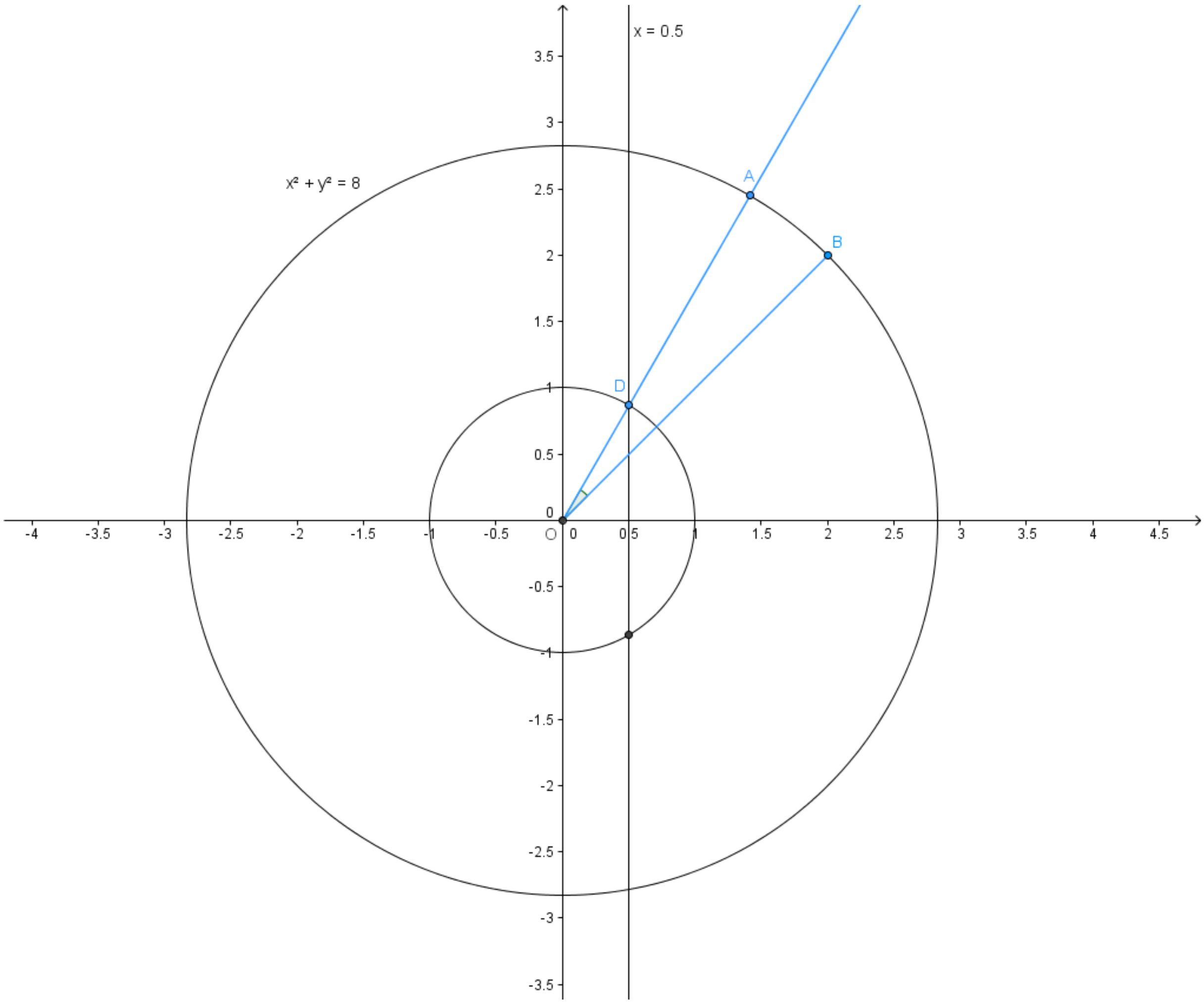
→ *Question c.*

En guise de préambule, nous partons du principe que nous sommes capables de tracer des parallèles aux axes (les constructions correspondantes ne sont pas détaillées).

Dans un premier temps, nous construisons le point A à partir du point B (voir figure ci-après).

Les principales étapes de la construction sont les suivantes :

- On trace le cercle trigonométrique (i.e. cercle de centre O et de rayon 1) ainsi que le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ (i.e. d'équation $x^2 + y^2 = 8$) ;
- On trace la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Cette droite rencontre le cercle trigonométrique en un point que nous nommons D ;
- Nous traçons la demi-droite d'origine O passant par D. Elle fait un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ avec le demi-axe des abscisses positives ;
- Cette demi-droite coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A.



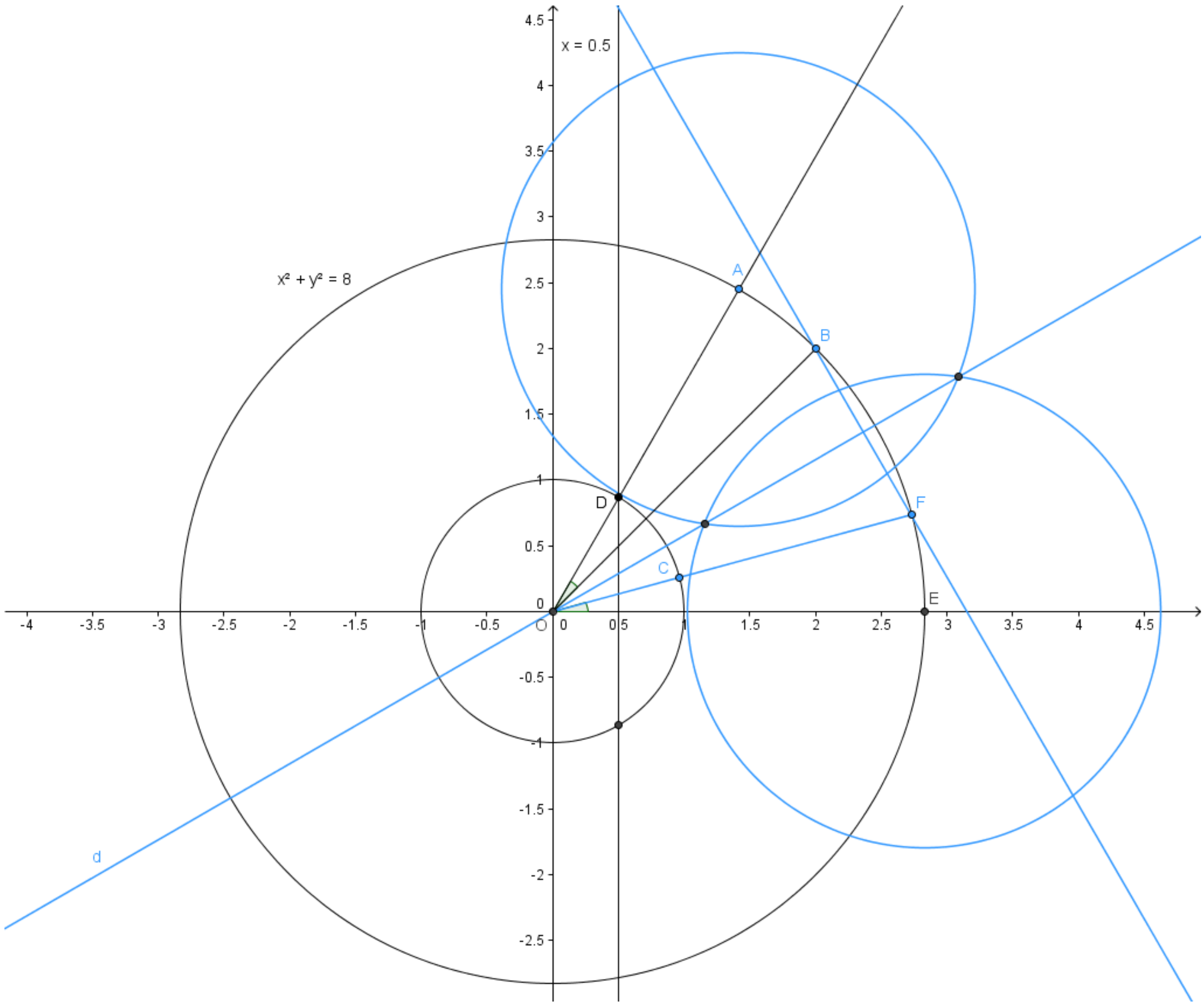
Nous allons maintenant construire le point C.

Nous commençons par nommer E le point d'intersection d'abscisse positive du cercle $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

Nous construisons alors la bissectrice *d* de l'angle $\widehat{\text{EOA}}$ à l'aide de deux cercles de centres E et A et de même rayon. Dans ces conditions, le point E est le symétrique du point A par rapport à *d*.

Si nous appelons F le symétrique du point B par rapport à *d*, nous avons : $\widehat{\text{EOF}} = \widehat{\text{BOA}} = \dfrac{\pi}{12}$.
Pour construire F, nous construisons la perpendiculaire à *d* passant par B. Elle coupe $\mathscr{C}$ en B et F.

Enfin, le segment [OF] coupe le cercle trigonométrique en C. La construction est achevée.



→ *Question d.*

On a : $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$.
Il vient donc :

$$Z^{2007} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2007} = e^{i\frac{2007\pi}{12}} = e^{i\frac{3\times 669\pi}{3\times 4}} = e^{i\frac{669\pi}{4}} = e^{i\frac{(668+1)\pi}{4}}$$

$$= e^{i\frac{(4\times 167+1)\pi}{4}} = e^{i167\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(166+1)\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi} \times \underbrace{\left(e^{2i\pi}\right)^{83}}_{=1} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = -e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z^{2007} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}$$