Polynésie – Juin 2010 – Série S – Exercice

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+ib$ où a et b sont deux nombres réels.

On note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\bar{z}=a-ib$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation $\left(\text{E}\right)$: $z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation $\left(\text{E}\right)$ alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation $\left(\text{E}\right)$.
2. On considère le nombre complexe $z_0=1+i$.
   a) Ecrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation $\left(\text{E}\right)$.
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation $\left(\text{E}\right)$.

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=1+i\ ;\ z_{\text{B}}=-1+i\ ;\ z_{\text{C}}=-1-i\ \text{ et }\ z_{\text{D}}=1-i$$

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

2. a. Démontrer que l'affixe du point E, notée z_{E} est égale à $-1+\sqrt{3}$.
   b. Déterminer l'affixe z_{F} du point F.
   c. Démontrer que le quotient $\dfrac{z_{\text{A}}-z_{\text{E}}}{z_{\text{A}}-z_{\text{F}}}$ est un nombre réel.
   d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

Analyse

Un exercice sur les complexes qui mélange algèbre (utilisation de la conjugaison dans le cadre de la résolution d'une équation du quatrième degré avec, pour commencer, un récurrence permettant de redémontrer un résultat du cours) et géométrie (les solutions de l'équation sont les affixes des sommets d'un carré et on introduit une rotation pour obtenir, in fine un alignement). Une fois encore, pas de difficultés insurmontables mais de nombreux thèmes de cours abordés.

Résolution

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Question 1.

Posons $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$. On a immédiatement : $\overline{z}=a-ib$ et $\overline{z'}=a'-ib'$.

On a : $z\times z'=(a+ib)\times(a'+ib')=a\times a'+a\times ib'+ib\times a'+ib\times ib'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.
D'où : $\overline{z\times z'}=(aa'-bb')-i(ab'+a'b)$.

Par ailleurs, on a :

$$\overline{z}\times\overline{z'}=(a-ib)\times(a'-ib')=a\times a'-a\times ib'-ib\times a'+ib\times ib'=(aa'-bb')-i(ab'+a'b)$$

Les calculs ci-dessus étant valables pour tous réels a, b, a' et b', on en déduit finalement :

Pour tous complexes z et z' : $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

Question 2.

Le résultat s'établit à l'aide d'un récurrence en considérant les propriétés $\mathscr{P}_n$ définies, pour tout entier naturel n non nul par :

$$\mathscr{P}_n : « \overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a : $\overline{z^n}=\overline{z^1}=\overline{z}$ et $\left(\overline{z}\right)^n=\left(\overline{z}\right)^1=\overline{z}$. Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit n un entier naturel non nul quelconque <u>fixé</u>. Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ soit vraie et intéressons-nous à la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\ &= \overline{z^n} \times \overline{z} && \text{(d'après la question 1.)} \\ &= \overline{z}^n \times \overline{z} && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \overline{z}^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

En définitive, pour tout entier naturel *n* non nul, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

Question 1.

Soit *z* un complexe solution de l'équation $(\mathrm{E}) : z^4 = -4$.

On a alors : $(-z)^4 = (-1)^4 \times z^4 = 1 \times (-4) = -4$.
Le complexe $-z$ est donc également solution de l'équation (E).

Par ailleurs, en utilisant le résultat de la question 2. de la partie A : $\left(\overline{z}\right)^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$.
Ainsi, le complexe $\overline{z}$ est également solution de l'équation (E).

Si le complexe z est solution de l'équation $(\mathrm{E}) : z^4 = -4$ alors
les complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont également des solutions de l'équation (E).

Question 2.a.

On a facilement : $z_0 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$z_0 = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Question 2.b.

En utilisant la forme exponentielle obtenue à la question précédente, il vient :

$$z_0^4 = \left(\sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 \times \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4\times e^{i\frac{\pi}{4}\times 4} = 4\times e^{i\pi} = -4$$

Le complexe $z_0 = 1+i$ est bien solution de l'équation (E).

Question 3.

D'après la question 1., si on dispose d'un complexe solution de l'équation (E), alors l'opposé et le conjugué de ce complexe sont également des solutions de l'équation (E).

Ainsi, $-z_0 = -1-i$ et $\overline{z_0} = 1-i$ sont des solutions de (E).

Mais comme $-z_0$ est solution de (E), il en va de même pour $\overline{-z_0} = -1+i$.

En définitive, on dispose de trois autres solutions : $\overline{z_0} = 1-i$, $-z_0 = -1-i$ et $\overline{-z_0} = -1+i$.

Les complexes $\overline{z_0} = 1-i$, $-z_0 = -1-i$ et $\overline{-z_0} = -1+i$ sont trois autres solutions de (E).

Remarque : le théorème fondamental de l'algèbre précise qu'une équation de degré *n* dans $\mathbb{C}$ admet exactement *n* racines (certaines étant éventuellement confondues). Ici, nous avons en fait trouvé quatre racines d'une équation de degré 4 et il n'en existe donc pas d'autres.

Partie C

Question 1.

De façon générale, l'expression complexe de la rotation de centre le point d'affixe ω et d'angle de mesure θ est :

$$z \mapsto r(z) = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$$

Ici, on a : $\omega = z_{\mathrm{C}} = -1-i$ et $-\frac{\pi}{3}$.

D'où :

$$\begin{aligned} r(z) &= -1-i+e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+1+i) \\ &= -1-i+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](z+1+i) \\ &= -1-i+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+1+i) \\ &= -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)(z+1+i) \end{aligned}$$

Cette expression de $r(z)$ est utile pour la suite (calculs des affixes des points E et F) au regard des valeurs des affixes des points B et D. On peut cependant poursuivre le calcul :

$$\begin{aligned} r(z) &= -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)(z+1+i) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)z+(1+i)\left(-1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\frac{1}{2}(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right] \end{aligned}$$

L'écriture complexe de la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ est :

$$z \mapsto r(z) = -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)(z+1+i) = \frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right]$$

Question 2.a.

Le point E étant l'image du point B par *r*, on a : $z_E = r(z_B)$. Soit, en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} z_E &= r(z_B) \\ &= -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)(z_B+1+i) = -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)(-1+i+1+i) \\ &= -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)2i = -1-i+i\left(1-i\sqrt{3}\right) = -1-i+i+\sqrt{3} \\ &= -1+\sqrt{3} \end{aligned}$$

On a bien :

$$z_E = -1+\sqrt{3}$$

Question 2.b.

On procède comme à la question précédente.

On a ici : $z_F = r(z_D)$.
Soit :

$$\begin{aligned} z_F = r(z_D) &= -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z_D+1+i\right) \\ &= -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1-i+1+i\right) = -1-i+\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)2 \\ &= -1-i+\left(1-i\sqrt{3}\right) = -1-i+1-i\sqrt{3} \\ &= -\left(1+\sqrt{3}\right)i \end{aligned}$$

$$\boxed{z_F = -\left(1+\sqrt{3}\right)i}$$

Question 2.c.

A l'aide des résultats obtenus aux deux questions précédentes, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} &= \frac{1+i-\left(-1+\sqrt{3}\right)}{1+i-\left[-\left(1+\sqrt{3}\right)i\right]} = \frac{2-\sqrt{3}+i}{1+\left(2+\sqrt{3}\right)i} \\ &= \frac{\left(2-\sqrt{3}+i\right)\times\left[1-\left(2+\sqrt{3}\right)i\right]}{\left[1+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right]\times\left[1-\left(2+\sqrt{3}\right)i\right]} \\ &= \frac{\left[\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)\right]+i\left[\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)+1\right]}{1^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{4+i\left[4-3+1\right]}{1+4+4\sqrt{3}+3} = \frac{4}{8+4\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le quotient } \frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} \text{ est un nombre réel.}}$$

Question 2.d.

D'après la question précédente, on a : $\arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = k\pi$ où k est un entier.

Or, $\arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = \left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}\right)$.

On en déduit immédiatement que les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que les points A, E et F sont alignés.

Les points A, E et F sont alignés.

A titre de complément, nous fournissons une figure faisant apparaître les points A, B, C, D, E et F ainsi que la droite passant par les points A, E et F.