Centres étrangers – Juin 2009 – Série S – Exercice

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\bar{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3. Pour tout nombre complexe z, si $|1+iz|=|1-iz|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z+z'|=|z-z'|$ alors les droites (OM) et $(\mathrm{OM'})$ sont perpendiculaires.

Analyse

Quatre questions sur les complexes où, une fois encore (!) la géométrie n'est pas très loin. Pour autant, on peut aussi adopter une approche plus algébrique en manipulant des formes algébriques. Dans la mesure du possible, nous proposons les deux approches.

Résolution

Question 1.

La proposition est FAUSSE.

Posons $z = x + iy$.

On a alors : $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

D'où : $\text{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = (\text{Re}(z))^2 - (\text{Im}(z))^2$.

Considérons alors par exemple : $z = 1 + i$.

On a : $\text{Re}(z) = 1$ mais $z^2 = (1+i)^2 = 2i$ et $\text{Re}(z^2) = 2 \neq 1 = (\text{Re}(z))^2$.

Question 2.

La proposition est VRAIE.

Pour tout complexe z non nul, on a :

$$\text{OM} = |z|,\ \text{ON} = |\overline{z}| = |z| = \text{OM} \ \text{ et } \ \text{OP} = \left|\frac{z^2}{\overline{z}}\right| = \frac{|z^2|}{|\overline{z}|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| = \text{OM} = \text{ON}$$

Comme : $\text{OM} = \text{ON} = \text{OP}$, les trois points M, N et P appartiennent bien à un même cercle de centre O.

Question 3.

La proposition est VRAIE.

On a : $|1+iz| = |i(-i+z)| = |z-i|$ et $|1-iz| = |-i(i+z)| = |z-(-i)|$.

Ainsi, l'égalité $|1+iz| = |1-iz|$ équivaut à $|1+iz| = |z-(-i)|$. Or, cette dernière équivaut à écrire que le point M d'affixe z appartient à la médiatrice du segment $[\text{AB}]$, A et B étant les points d'affixes $-i$ et i respectivement. Mais la médiatrice de ce segment n'est rien d'autre que l'axe des abscisses dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé. Ainsi, la partie imaginaire de *z* est bien nulle.

Ici, on peut aussi utiliser la forme algébrique de *z* en posant $z = x + iy$.
On a alors :

$$|1+iz|^2 = |1+i(x+iy)|^2 = |(1-y)+ix|^2 = (1-y)^2 + x^2$$

Et :

$$|1-iz|^2 = |1-i(x+iy)|^2 = |(1+y)-ix|^2 = (1+y)^2 + x^2$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
&|1+iz| = |1-iz| \\
&\Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \\
&\Leftrightarrow (1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2 \\
&\Leftrightarrow (1-y)^2 = (1+y)^2 \\
&\Leftrightarrow (1-y)^2 - (1+y)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-y+1+y)(1-y-1-y) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\times(-2y) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0
\end{aligned}$$

Question 4.

La proposition est VRAIE.

Ici encore, on peut donner une interprétation géométrique simple de l'égalité proposée.
Introduisons le point P d'affixe : $z + z'$. Alors OMPM' est un parallélogramme et on a :
$|z+z'| = \mathrm{OP}$ et $|z-z'| = \mathrm{MM}'$.
Un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur est un rectangle et il vient alors immédiatement : (OM) et (OM') perpendiculaires.

On peut également utiliser les propriétés du module et la conjugaison :

$$
\begin{aligned}
& |z+z'| = |z-z'| \\
\Leftrightarrow\ & |z+z'|^2 = |z-z'|^2 \\
\Leftrightarrow\ & (z+z')\left(\overline{z+z'}\right) = (z-z')\left(\overline{z-z'}\right) \\
\Leftrightarrow\ & (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = (z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cancel{z\overline{z}} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + \cancel{z'\overline{z'}} = \cancel{z\overline{z}} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + \cancel{z'\overline{z'}} \\
\Leftrightarrow\ & z\overline{z'} + z'\overline{z} = -z\overline{z'} - z'\overline{z} \\
\Leftrightarrow\ & z\overline{z'} + z'\overline{z} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Le complexe $z\overline{z'}$ est donc un imaginaire pur.

Or : $z\overline{z'} = |z|e^{i\arg z}\,|z'|e^{-i\arg z'} = |z||z'|e^{i(\arg z - \arg z')} = |z||z'|e^{i\arg\frac{z}{z'}}$.

On a donc :

$$z\overline{z'} \text{ est un imaginaire pur } \Leftrightarrow \arg\frac{z}{z'} = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$$

Mais : $\arg\dfrac{z}{z'} = \arg\dfrac{z-0}{z'-0} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}'}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

En définitive, on a :

$$|z+z'| = |z-z'| \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}'}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow (\mathrm{OM}) \text{ et } (\mathrm{OM}') \text{ perpendiculaires}$$