Antilles - Guyane – Juin 2001 – Série S – Exercice

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on désigne par $\mathrm{M}(z)$ le point M ayant pour affixe z.

1. Placer sur une figure les points $\mathrm{A}(2+i)$, $\mathrm{B}(2i)$, $\mathrm{C}(-4+3i)$ et $\mathrm{D}(-8)$ en prenant 1 cm pour unité graphique.

2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $\mathrm{M}(z)$, associe le point $\mathrm{M}'(z')$ tel que :

$$z'=(1+2i)z-4-2i$$

   a. Préciser les images des points A et B par f.

   b. Montrer que f admet un unique point fixe Ω, dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si : $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}$).

3. On admet que $\omega=1-2i$.

   a. Montrer que, pour tout complexe z on a : $z'-z=-2i(\omega-z)$.

   Dans toute la suite, on suppose que M est différent de Ω.

   b. Déduire de la question précédente le rapport des distances $\dfrac{\mathrm{MM}'}{\mathrm{M}\Omega}$, et l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega},\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right)$.

   c. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M', connaissant le point M (on réalisera cette construction sur la figure de la question 1. en considérant un point M quelconque).

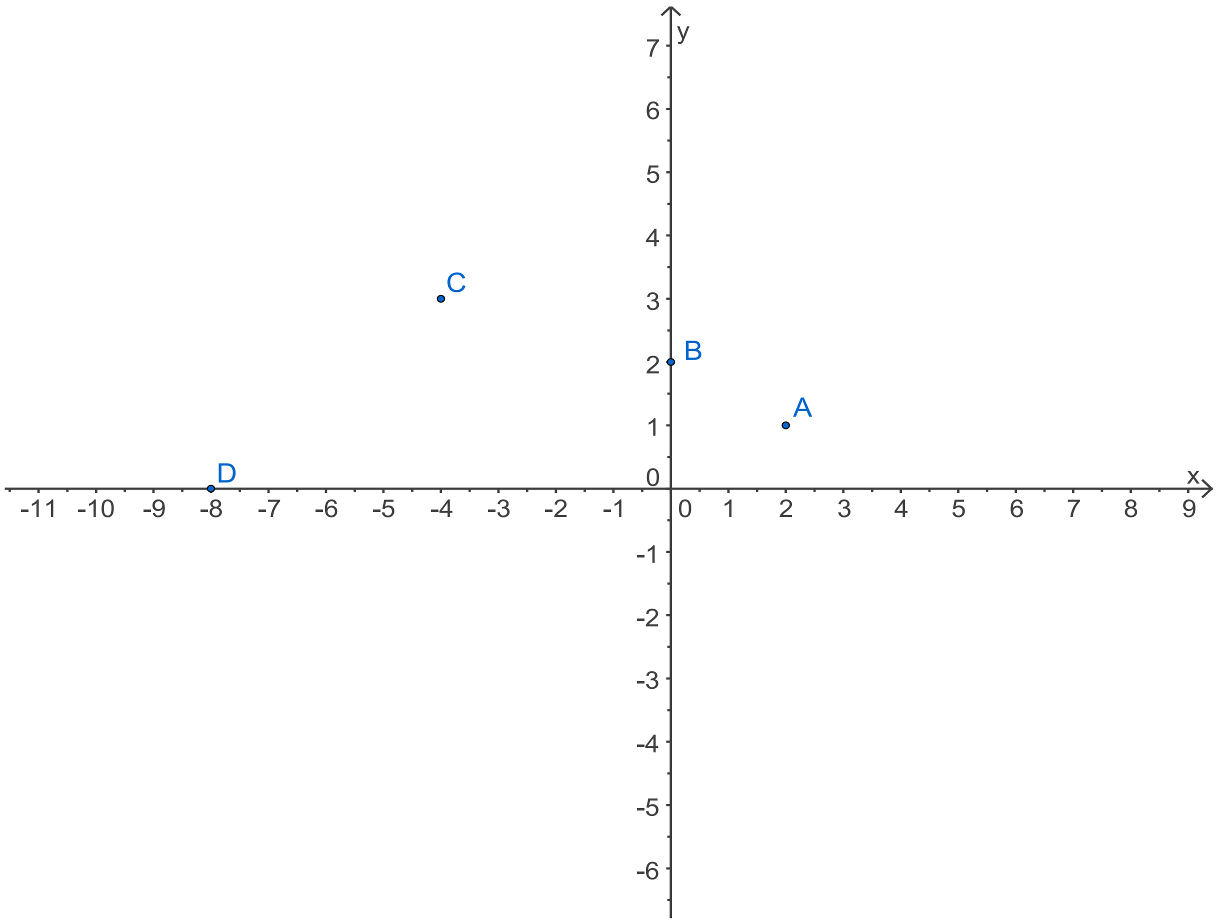
Analyse

Une transformation du plan qui ne veut pas dire son nom ! Nous avons effectivement affaire ici à une similitude (directe), transformation générale du plan dont l'étude se fait en spécialité. Pour autant les élèves suivant le seul programme obligatoire sont comme le bourgeois gentilhomme : il(elle)s pratiquent les similitudes sans en avoir conscience puisque les translations, rotations et homothéties en sont (mais ce ne sont pas les seules) ! Ceci dit, l'exercice proposé reste à un niveau assez simple en mettant l'accent sur : l'identification du point fixe de la transformation ; une construction géométrique du point image à partir d'une récriture de l'expression complexe de la transformation (attention, il ne s'agit pas, en l'occurrence, de la forme réduite …).

Résolution

Question 1.

On a facilement :



Question 2.a.

Image du point A.

En utilisant l'expression complexe de *f* avec $z = 2+i$, il vient :

$$z' = (1+2i)(2+i) - 4 - 2i = \cancel{2} + i + 4i \cancel{-2} - 4 - 2i = -4+3i$$

On reconnaît l'affixe du point C. On a donc :

$$\boxed{f(\mathrm{A}) = \mathrm{C}}$$

Image du point B.

On utilise cette fois l'expression complexe de *f* avec $z = 2i$, il vient :

$$z' = (1+2i)2i - 4 - 2i = \cancel{2i} - 4 - 4 \cancel{-2i} = -8$$

On reconnaît l'affixe du point D. On a donc :

$$\boxed{f(\mathrm{B}) = \mathrm{D}}$$

Question 2.b.

La point M d'affixe z est un point fixe pour f si, et seulement si, on a : $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, soit : $z' = z$.

Or :

$$\begin{aligned} & z' = z \\ \Leftrightarrow\ & (1+2i)z - 4 - 2i = z \\ \Leftrightarrow\ & 2iz - 4 - 2i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & iz = 2+i \\ \Leftrightarrow\ & -i \times iz = -i(2+i) \\ \Leftrightarrow\ & z = 1-2i \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc comme unique point invariant le point } \Omega \text{ d'affixe : } \omega = 1-2i.}$$

Question 3.a.

On a :

$$
\begin{aligned}
z'-z &= (1+2i)z-4-2i-z \\
&= 2iz-4-2i \\
&= 2iz-2i(1-2i) \\
&= 2iz-2i\omega \\
&= -2i(\omega-z)
\end{aligned}
$$

On a bien :

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ z'-z=-2i(\omega-z)}$$

Question 3.b.

Pour tout complexe z différent de ω, on a, d'après la question précédente :

$$\frac{z'-z}{\omega-z}=-2i$$

On en tire : $\left|\dfrac{z'-z}{\omega-z}\right|=|-2i|=2$. Mais : $\left|\dfrac{z'-z}{\omega-z}\right|=\dfrac{|z'-z|}{|\omega-z|}=\dfrac{\text{MM}'}{\text{M}\Omega}$.

On a donc : $\dfrac{\text{MM}'}{\text{M}\Omega}=2$.

Par ailleurs : $\dfrac{z'-z}{\omega-z}=-2i\Rightarrow\arg\dfrac{z'-z}{\omega-z}=\arg(-2i)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Or : $\arg\dfrac{z'-z}{\omega-z}=\left(\overrightarrow{\text{M}\Omega},\overrightarrow{\text{MM}'}\right)$.

On a donc : $\left(\overrightarrow{\text{M}\Omega},\overrightarrow{\text{MM}'}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Finalement :

$$\boxed{\frac{\text{MM}'}{\text{M}\Omega}=2\ \text{ et }\ \left(\overrightarrow{\text{M}\Omega},\overrightarrow{\text{MM}'}\right)=-\frac{\pi}{2}}$$

Question 3.b.

On suppose M donné différent de Ω.

Comme $\left(\overrightarrow{\text{M}\Omega},\overrightarrow{\text{MM}'}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$, on est conduit à considérer la rotation de centre M et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$. On va commencer par chercher l'image du point Ω par cette rotation : on appelle P ce point.

En ajoutant ensuite la contrainte : $\frac{MM'}{M\Omega}=2$, on est conduit à construire le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MP}$ c'est-à-dire l'image du point M' par l'homothétie de centre M et de rapport 2.

On obtient :