

Pondichéry – Avril 2014 – Série S – Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P=0,5$?

b. Pour $P=0,01$ on obtient $n=33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

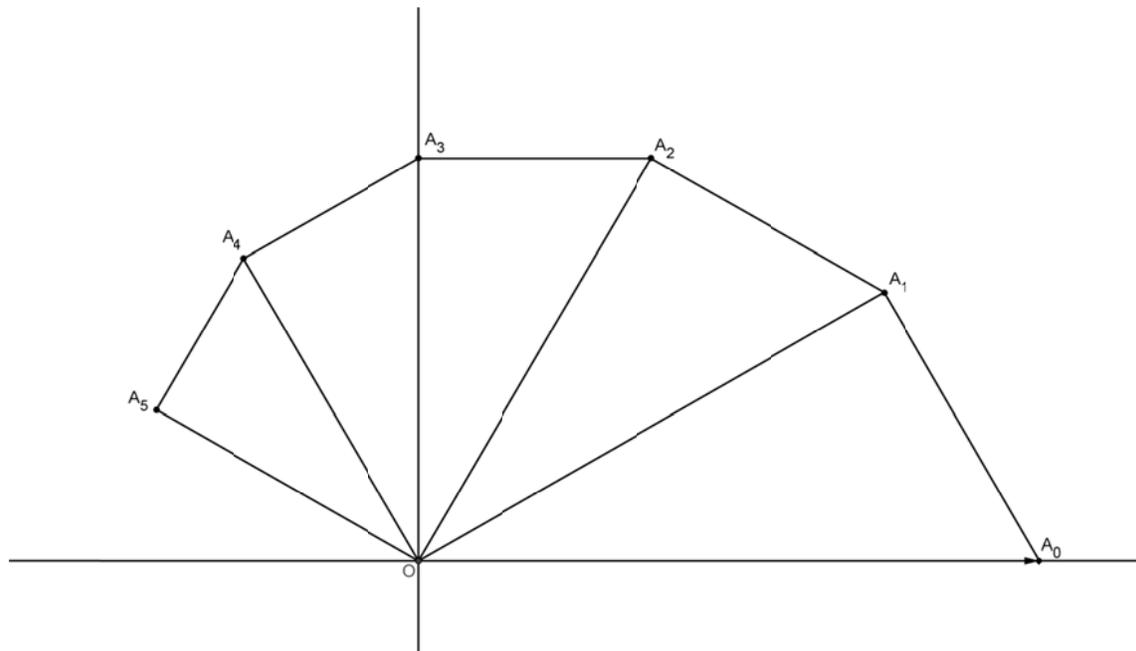
4. a. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

b. On admet que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6 , A_7 , A_8 et A_9 .

Les traits de construction seront apparents.



Analyse

Sans présenter de difficulté majeure, l'exercice, conforme, de ce point de vue, à une tendance certaine, aborde une variété de thèmes nécessitant des méthodes de résolution elles-mêmes variées.

Les questions 1 et 2 conduisent à des manipulations algébriques sur des complexes, notamment les termes d'une suite complexe.

La question 3 est l'ingrédient algorithmique de l'exercice.

La question 4 permet de se rappeler que l'algèbre et la géométrie entretiennent des liens étroits et que manipuler les complexes en négligeant la géométrie est une bien triste chose ! ☺

Incidentement, cette question doit faire penser les candidat(e)s à se munir, pour l'épreuve, d'un crayon papier, d'un compas et d'une gomme !

Résolution

Question 1.

On commence par déterminer le module de $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$:

$$\left| \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right|^2 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\text{D'où : } \left| \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right| = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il vient alors :

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

On identifie facilement : $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ et $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$.

$$\text{Finalement : } \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Question 2.a.

Pour tout entier naturel n , on a : $r_n = |z_n|$.

D'où, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n \right| = \left| \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right| \times |z_n| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \underbrace{\left| e^{i\frac{\pi}{6}} \right|}_{=1} \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_n$$

La suite (r_n) est bien géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La suite (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 2.b.

D'après le résultat de la question précédente, on a, pour tout entier naturel n : $r_n = r_0 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

Or $z_0 = 1$. On en tire immédiatement : $r_0 = |z_0| = |1| = 1$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

Question 2.c.

Comme z_n est l'affixe du point A_n , on a immédiatement : $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

Or, on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \in]-1; 1[$. On en déduit immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ et, finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n = 0$$

Question 3.a.

Faisons « tourner l'algorithme à la main » avec $P = 0,5$:

n	R (valeur exacte)	R (valeur approchée à 10^{-3})	$R > P$
0	1	1,000	Oui
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866	Oui
2	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0,75$	0,750	Oui
3	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$	0,650	Oui
4	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{9}{16} = 0,5625$	0,563	Oui
5	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \frac{9\sqrt{3}}{32}$	0,487	Non

L'algorithme va donc afficher la dernière valeur de la variable N, à savoir 5.

Pour $P = 0,5$ l'algorithme affiche la valeur 5.

Question 3.b.

La boucle « Tant que » s'interrompt dès que la condition « $R > P$ » n'est plus vérifiée, c'est-à-dire, dès que l'on a : « $R \leq P$ ». L'algorithme affiche alors la valeur courante de la variable n . En d'autres termes, la valeur courante de la variable R correspondant à r_n (valeur initiale égale à 1 et multiplication par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ à chaque passage dans la boucle), l'algorithme fournit la plus petite valeur de n telle que $r_n \leq P$.

Avec $P = 0,01$ on a :

$$r_n \leq P \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{<0 \text{ car } \frac{\sqrt{3}}{2} < 1} \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Or : $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 32,02 > 32$. L'algorithme affichera donc la valeur 33 comme mentionné dans l'énoncé.

Pour un réel P strictement positif donné, l'algorithme affiche la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ soit inférieur ou égal à P .

Question 4.a.

Soit n un entier naturel quelconque. Nous allons ici comparer OA_n^2 et $OA_{n+1}^2 + A_n A_{n+1}^2$.

On a :

$$OA_{n+1}^2 = r_{n+1}^2 = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2(n+1)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = \frac{3}{4} \times \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{3}{4} \times r_n^2$$

$$A_n A_{n+1}^2 = \|\overline{A_n A_{n+1}}\|^2 = |z_{n+1} - z_n|^2 = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n - z_n\right|^2 = \left|\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right|^2$$

$$= \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right|^2 \times |z_n|^2 = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\right] \times r_n^2 = \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}\right) \times r_n^2 = \frac{4}{16} \times r_n^2$$

$$= \frac{1}{4} \times r_n^2$$

D'où : $OA_{n+1}^2 + A_n A_{n+1}^2 = \frac{3}{4} \times r_n^2 + \frac{1}{4} \times r_n^2 = r_n^2 = OA_n^2$.

Comme $OA_{n+1}^2 + A_n A_{n+1}^2 = OA_n^2$, la réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .

Pour tout entier naturel n , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .

Question 4.b.

Pour tout entier naturel n , on a : $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$, c'est-à-dire : $z_n = |z_n| e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

On en déduit immédiatement que $\frac{n\pi}{6}$ est un argument de z_n .

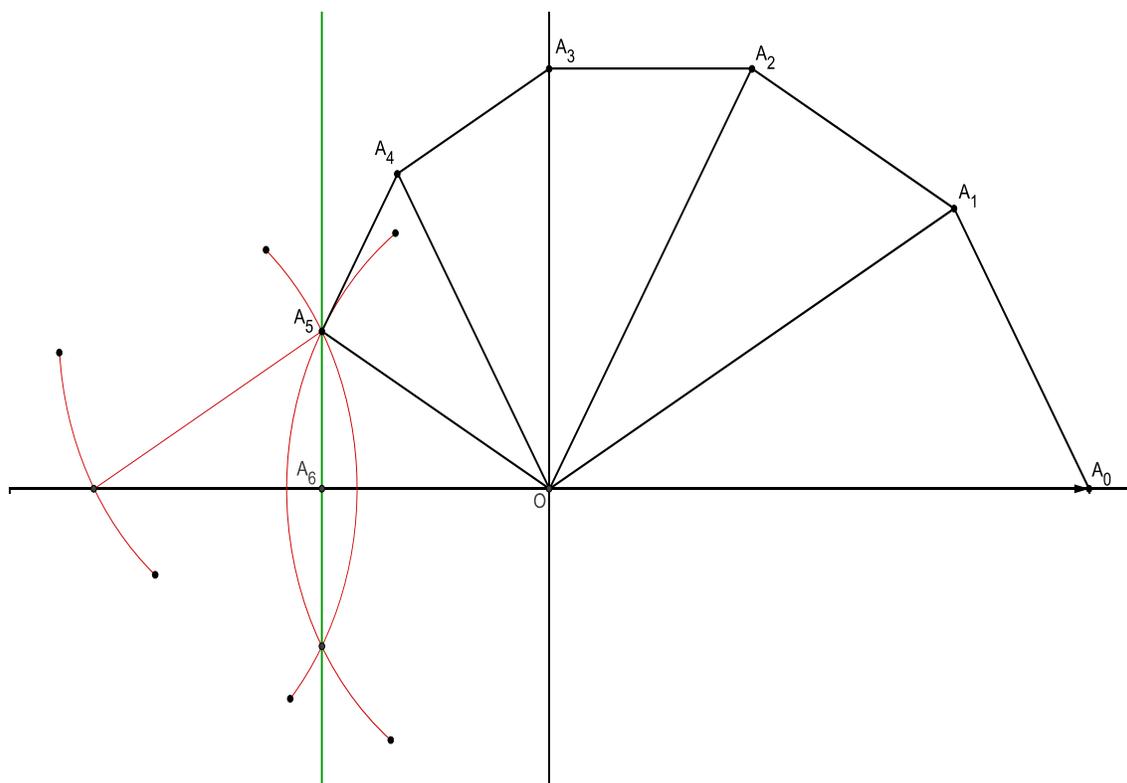
On a alors : A_n est un point de l'axe des ordonnées si, et seulement si, $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k est un entier A PRIORI quelconque. Mais puisque n est un entier naturel, on doit se limiter à k entier naturel également ($n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3 + 6k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k \in \mathbb{N}$).

Le point A_n est un point de l'axe des ordonnées si, et seulement si, $n = 3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Question 4.c.

Avec $n = 6$, nous avons $z_6 = r_6 e^{i\frac{6\pi}{6}} = r_6 e^{i\pi} = -r_6$.

On va donc simplement obtenir le point A_6 en projetant perpendiculairement le point A_5 sur l'axe des abscisses : on obtient bien ainsi un triangle OA_5A_6 rectangle en A_6 (cf. figure ci-dessous).

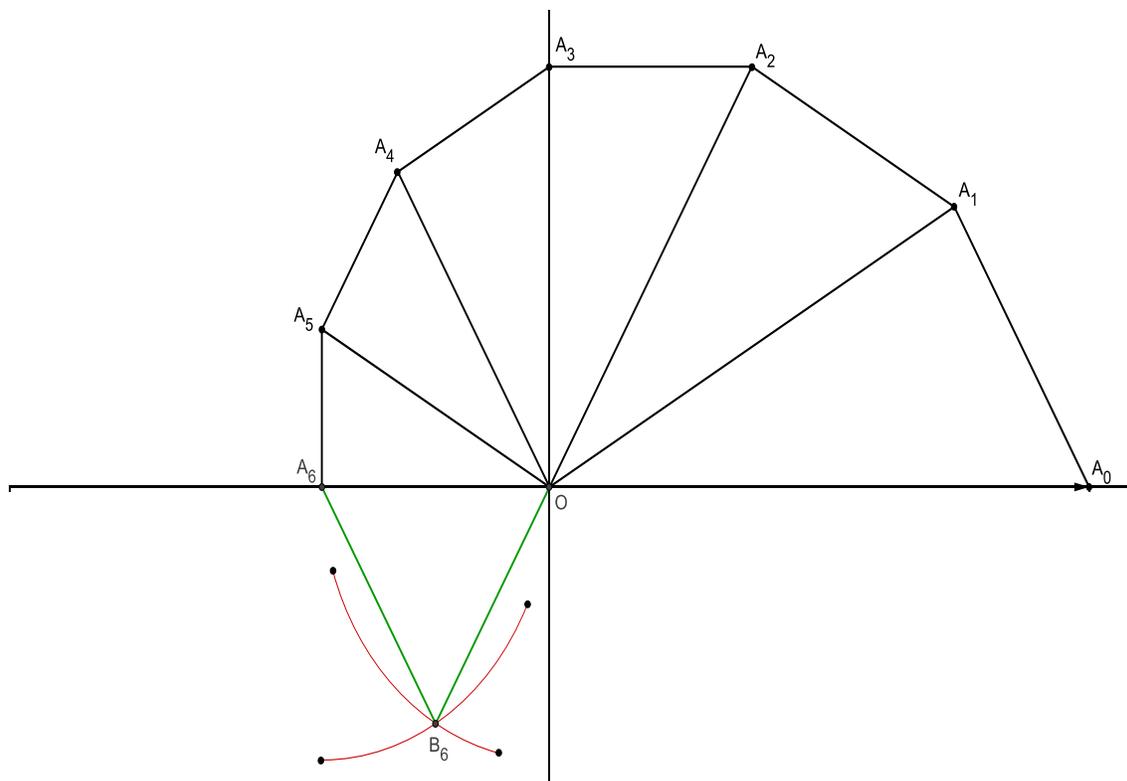


La construction est simple et utilise le fait que les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement. Les sommets de losange se construisent à l'aide d'arcs de cercles (en rouge sur la figure) à partir du segment $[OA_5]$ (dont la longueur est celle des quatre côtés du losange). Le point A_6 est alors le point d'intersection des diagonales du losange.

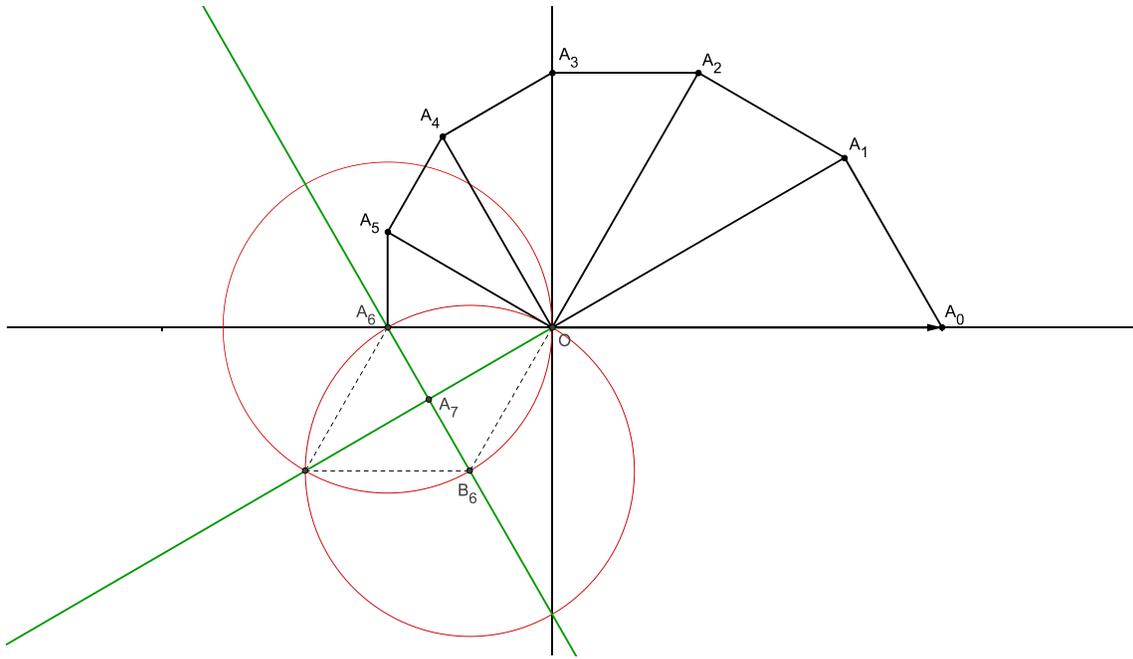
Pour les points A_7 et A_8 , les constructions sont moins immédiates.

Nous détaillons un peu le principe d'une construction du point A_7 .

Comme $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$ et $z_{n+1} = r_{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{6}}$, nous pouvons dire que l'angle $\widehat{A_n O A_{n+1}}$ admet pour mesure $\frac{\pi}{6}$. Comme on peut facilement construire la bissectrice d'un angle, nous allons en fait construire un triangle équilatéral à partir du segment $[OA_n]$, soit ici $[OA_6]$ (deux arcs de cercles, respectivement centrés en O et en A_6 suffisent (en rouge sur la figure ci-dessous)) : nous notons B_6 le troisième sommet de ce triangle.



Le point A_7 est alors obtenu, dans le triangle OA_6B_6 , comme pied de la hauteur issue du sommet O (rappelons que dans un triangle équilatéral la hauteur, la bissectrice et la médiane issues d'un sommet sont confondues). La construction du point A_7 se fait alors comme précédemment (fondamentalement à partir d'un losange).



Les points A_8 et A_9 se construisent alors respectivement comme les points A_7 et A_6 .

