

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z .

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Ecrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Calculer a^2 sous forme algébrique.

En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. **Restitutions organisée des connaissances**

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe \bar{z} défini par $\bar{z} = x - iy$.

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué \bar{z} est également une solution de (E).

En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Analyse

Un exercice complet de résolution dans \mathbb{C} d'une équation du quatrième degré se ramenant à une équation du second degré. Diverses notions algébriques sont ainsi passées en revue. L'exercice est classique et ne présente pas de difficulté particulière. On pourrait juste déplorer l'absence d'une cinquième question dans laquelle on aurait pu demander aux candidats de montrer que les solutions de l'équation étaient les affixes des sommets d'un rectangle dans le plan complexe. Mais il est vrai que la géométrie du chapitre relatif aux complexes a une fâcheuse tendance à se réduire comme peau de chagrin ... Hélas !

Résolution

Question 1.

Soit l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ à résoudre dans \mathbb{C} .

Le discriminant s'écrit : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = 16 - 4 \times 16 = -3 \times 16 = (4\sqrt{3}i)^2$.

Les solutions, conjuguées, de l'équation s'écrivent alors :

$$Z_1 = \frac{-4 - 4\sqrt{3}i}{2} = -2 - 2\sqrt{3}i \text{ et } Z_2 = \overline{Z_1} = \frac{-4 + 4\sqrt{3}i}{2} = -2 + 2\sqrt{3}i$$

On a : $|Z_1|^2 = |Z_2|^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$ et donc :

$$\begin{aligned} Z_1 &= 4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4 \left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = 4 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \right] \\ &= 4 \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right] = 4 \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) \right] \\ &= 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Puis : $Z_2 = \overline{Z_1} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

L'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ admet pour solutions dans \mathbb{C} :

$$Z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } Z_2 = \overline{Z_1} = -2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Question 2.

On a : $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. D'où :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 2^2 e^{2 \times i\frac{\pi}{3}} \\ &= 4 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] = 4 \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= 4 \left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = 4 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -2 + 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

On a alors :

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (z - a)(z + a) = 0 \Leftrightarrow z = a \text{ ou } z = -a$$

Comme $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$, il vient finalement :

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow z = a \text{ ou } z = -a \Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ ou } z = -1 - i\sqrt{3}$$

L'équation $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ admet pour solutions les deux complexes :

$$-1 - i\sqrt{3} \text{ et } 1 + i\sqrt{3}$$

Question 3.

Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux complexes (x_1, x_2, y_1 et y_2 sont des réels).

On a : $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ et donc :

$$\overline{z_1 z_2} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Par ailleurs :

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \times (x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(-x_1 y_2 - y_1 x_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

On a bien :

$$\text{Pour tous complexes } z_1 \text{ et } z_2 : \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Nous allons établir le deuxième résultat en menant un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : \mathcal{P}_n : « $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ ».

Initialisation

Pour $n = 1$, on a : $\overline{z^1} = \overline{z} = \overline{z}$ et $(\overline{z})^1 = (\overline{z}) = \overline{z}$. On a donc : $\overline{z^1} = (\overline{z})^1$.

La propriété \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_n vraie et on s'intéresse à \mathcal{P}_{n+1} .

On a :

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\ &= \overline{z^n} \cdot \overline{z} && \text{(en utilisant le résultat précédent)} \\ &= (\overline{z})^n \cdot \overline{z} && \text{(en utilisant l'hypothèse de récurrence)} \\ &= (\overline{z})^{n+1}\end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Question 4.

Soit (E) l'équation : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.

On a, en tenant compte du fait que le conjugué d'un réel est égal à lui-même et que le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués :

$$\begin{aligned}z^4 + 4z^2 + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{z^4 + 4z^2 + 16} = 0 &\Leftrightarrow \overline{z^4} + \overline{4z^2} + \overline{16} = 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{z})^4 + 4\overline{z^2} + 16 &= 0 \Leftrightarrow (\overline{z})^4 + 4(\overline{z})^2 + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{z} \text{ solution de (E)}\end{aligned}$$

$z \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \overline{z} \text{ est solution de (E)}.$

Nous transformons l'équation (E) en posant $Z = z^2$. L'équation (E) se réécrit alors :

$$Z^2 + 4Z + 16 = 0$$

D'après la première question, cette équation admet pour solutions $-2 - 2\sqrt{3}i$ et $-2 + 2\sqrt{3}i$.

On a donc : $Z^2 + 4Z + 16 = 0 \Leftrightarrow Z = -2 - 2\sqrt{3}i$ ou $Z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Soit encore, en revenant à l'équation (E) :

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i \text{ ou } z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

D'après la question 2, l'équation $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ admet pour solutions les deux complexes : $-a = -1 - i\sqrt{3}$ et $a = 1 + i\sqrt{3}$. Ces deux complexes sont ainsi deux solutions de l'équation (E).

D'après le résultat établi au début de la question, il en va de même pour leurs conjugués $\overline{-a} = -1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{a} = 1 - i\sqrt{3}$.

On dispose ainsi de quatre solutions de l'équation (E). Or, l'énoncé nous précise que celle-ci admet au plus quatre solutions. On en déduit finalement :

L'équation (E) admet exactement quatre solutions : $-1 - i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.