Nouvelle-Calédonie – Série ES – Novembre 2002 – Exercice

Une personne place, le 1er janvier 2001, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 4%, une somme de *a* euros.
De plus chaque 1er janvier des années suivantes, c'est à dire au 1er janvier 2002, au 1er janvier 2003, etc., elle place sur ce compte la somme de 1000 euros.
On pose $U_0 = a$. Plus généralement, pour tout entier naturel *n*, on appelle U_n la somme disponible sur le compte, le 1er janvier de l'année $(2001+n)$.

1. a) Justifier que, pour tout entier naturel *n*, on a :
$U_{n+1} = 1{,}04 U_n + 1000$.
b) Montrer que cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. Utilisation d'une suite auxiliaire géométrique
On pose $V_n = U_n + 25000$.
a) Vérifier que la suite (V_n) est géométrique, de raison 1,04. Préciser son premier terme en fonction de *a*.
b) Exprimer V_n en fonction de *a* et *n*.
c) En déduire que, pour tout entier naturel *n* :
$U_n = (a+25000) \times 1{,}04^n U_n - 25000$

3. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans
Calculer à 0,01 euro près le placement initial minimal *a* permettant de disposer sur ce compte, le 1er janvier 2005, d'une somme d'au moins 15000 euros.

Analyse

On a affaire ici à une exercice classique sur les suites arithmético-géométriques ne présentant pas de difficulté particulière. L'utilisation d'une suite auxiliaire géométrique permet de fournir explicitement le terme général de la suite initiale.

Résolution

→ Question 1.a.

Pour *n* entier naturel, U_n est la somme disponible sur le compte le 1[er] janvier de l'année $(2001+n)$. Cette somme est rémunérée au taux annuel de 4%. Elle va donc générer des intérêts d'un montant de : $U_n \times \frac{4}{100} = 0,04U_n$.

En outre, au 1[er] janvier de l'année suivante $(2002+n)$, la personne verse sur le compte une somme de 1000 euros.

Le capital au 1[er] janvier de l'année $2002+n$ va donc s'élever à : $U_n + 0,04U_n + 1000$, c'est à dire : $1,04U_n + 1000$.

On a bien : $U_{n+1} = 1,04U_n + 1000$

> Pour tout entier naturel *n*, on a la relation de récurrence : $U_{n+1} = 1,04U_n + 1000$.

→ Question 1.b.

Pour $n = 0$, on a : $U_0 = a$.

Il vient donc, en utilisant la relation précédente :

$U_1 = 1,04U_0 + 1000 = 1,04a + 1000$

$U_2 = 1,04U_1 + 1000 = 1,04(1,04a + 1000) + 1000 = 1,0816a + 2040$

On a donc :

$U_1 - U_0 = 1,04U_0 + 1000 - U_0 = 0,04a + 1000$

$U_2 - U_1 = 1,04U_1 + 1000 - U_1 = 1,0816a + 2040 - (1,04a + 1000) = 0,0416a + 1040$

A étant un nombre strictement positif, on a : $0,04a + 1000 < 0,0416a + 1040$, c'est à dire : $U_1 - U_0 < U_2 - U_1$.

Ces deux différences n'étant pas égales, on peut conclure que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

On a, par ailleurs : $U_1 = 1,04U_0 + 1000$. Donc : $\frac{U_1}{U_0} = 1,04 + \frac{1000}{U_0}$.

On a également : $\frac{U_2}{U_1} = 1,04 + \frac{1000}{U_1}$.

Comme $U_1 \neq U_0$, on a : $\frac{1000}{U_1} \neq \frac{1000}{U_0}$, d'où : $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$.

Ces deux rapports n'étant pas égaux, on en déduit que la suite (U_n) n'est pas géométrique.

→ *Question 2.a.*

Pour tout entier naturel *n*, on a : $V_n = U_n + 25000$.

On peut donc écrire, pour tout entier naturel *n* :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} + 25000 \\ &= 1,04U_n + 1000 + 25000 \\ &= 1,04U_n + 26000 \\ &= 1,04\left(U_n + \frac{26000}{1,04}\right) \\ &= 1,04\left(U_n + \frac{26000}{1,04}\right) \\ &= 1,04(U_n + 25000) \\ &= 1,04V_n \end{aligned}$$

Ce résultat traduit le fait que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 1,04.

La suite (V_n) est une suite géométrique de raison 1,04.

Pour $n = 0$, on a : $V_0 = U_0 + 25000 = a + 25000$.

Le premier terme de la suite (V_n) est $V_0 = a + 25000$.

→ *Question 2.b.*

D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel *n* :
$V_n = V_0 \times 1,04^n = (a + 25000) \times 1,04^n$.

Pour tout entier naturel *n* : $V_n = (a + 25000) \times 1,04^n$.

→ *Question 2.c.*

A partir de l'expression de V_n obtenue à la question précédente et de l'égalité $V_n = U_n + 25000$, il vient : $U_n = V_n - 25000 = (a+25000)\times 1,04^n - 25000$

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n : \ U_n = (a+25000)\times 1,04^n - 25000.}$$

→ *Question 3.*

Comme $2005 = 2001 + 4$, on a ici : $n = 4$.
D'après l'énoncé, on souhaite que la somme U_4 soit au moins égale à 15000 euros.
On va donc résoudre l'inéquation : $U_4 \geq 15000$, c'est à dire :

$$(a+25000)\times 1,04^4 - 25000 \geq 15000$$

Cette égalité est équivalente à : $(a+25000)\times 1,04^4 \geq 40000$, soit : $a + 25000 \geq \dfrac{40000}{1,04^4}$.

Finalement : $a \geq \dfrac{40000}{1,04^4} - 25000$.

La valeur arrondie à 0,01 euro près par excès de $\dfrac{40000}{1,04^4} - 25000$ est 9192,17.

Conclusion :

La valeur minimale du capital initial *a* à 0,01 euro près pour que l'on puisse disposer sur ce compte d'au moins 15000 euros au 1er janvier 2005 est 9192,17 euros.