Sciences Po
Option Mathématiques

Epreuve 2013
Corrigé

Vrai-Faux

Question 1. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

La suite (u_n) étant géométrique de raison différente de 1, on a classiquement, pour tout entier naturel n :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

où q est la raison de la suite (u_n).

Ici, on a $u_0 = -1$ et $q = \frac{4}{5}$. Il vint donc :

$$S_n = -1 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = -\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}} = -5 \times \left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]$$

Comme $\frac{4}{5} \in]-1;+1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} = 0$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -5$.
La proposition est donc fausse.

Remarque : on pouvait également remarquer que l'on a, u_0 étant strictement négatif et la raison q étant strictement positive : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$. Il en découle alors : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n < 0$. Il en résulte que la suite (S_n) ne peut converger que vers une limite négative, donc différente de 5.

Question 2. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = (2u_n + 3) + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$$

On en conclut immédiatement que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
La proposition est donc vraie.

Question 3. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

La définition (par récurrence) de la suite (u_n) nous permet immédiatement d'affirmer qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = 1$.
On en déduit immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = -\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, il vient finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n} = 0$.
La suite (v_n) est donc convergente de limite nulle.
La proposition est donc vraie.

Question 4. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

On peut modéliser la situation de la façon suivante.
L'interrogation d'une personne correspond à une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$ correspondant à la probabilité que la personne accepte de répondre (c'est l'issue « succès »).
En admettant que les 50 personnes interrogées acceptent ou non de répondre de façon indépendante, on peut considérer ces 50 interrogations comme la répétition de 50 épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0,2$ comme décrit ci-dessus.
Dans ces conditions, la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de personnes, parmi les 50, acceptant de répondre suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,2$.

On s'intéresse ici à la probabilité : $p(\mathrm{X} \geq 6)$.
La calculatrice fournissant des probabilités du type $p(m \leq \mathrm{X} \leq n)$, on choisit $m = 6$ et, pour *n*, n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 50.
On obtient : $p(\mathrm{X} \geq 6) \simeq 0,952$.
La proposition est donc vraie.

Rappelons que l'on a : $p(\mathrm{X} \geq 6) = \sum\limits_{k=6}^{50} \binom{50}{k} 0,2^k\, 0,8^{50-k}$.

$$p(\mathrm{X} \geq 6) = 1 - p(\mathrm{X} < 6) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{50}{k} 0,2^k 0,8^{50-k}$$

Question 5. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

On peut fournir divers contre-exemples.

Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \times n$.
La suite (u_n) n'est pas majorée. En effet, la suite (u_{2n}) des termes de rangs pairs tend vers $+\infty$ car pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{2n} = (-1)^{2n} \times 2n = 2n$. Ainsi, pour tout réel A positif, on pourra donc toujours trouver un terme u_{2N} supérieur à A.
Pour autant, la suite (u_n) n'admet pas de limite puisque la suite (u_{2n+1}) des termes de rangs impairs tend vers $-\infty$ (pour tout entier naturel *n*, on a :
$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \times (2n+1) = 2n+1$).
La proposition est donc fausse.

Question 6. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

L'équation est définie pour $x > 0$ et $x+1 > 0$ soit $x > 0$.
On a alors :

$$\ln(x) + \ln(x+1) = \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln[x(x+1)] = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x+1) = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x+2) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

La proposition est donc vraie.

Question 7. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

Pour étudier le parallélisme éventuel de deux droites, il suffit de comparer leurs coefficients directeurs.

La fonction *f* étant dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (une fonction polynôme et l'inverse de la fonction exponentielle), le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse 0 est donné par $f'(0)$.

Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2(-e^{-x}) \\ &= (x+1)e^{-x} \times [2-(x+1)] \\ &= (x+1)e^{-x} \times (1-x) \\ &= (1-x^2)e^{-x} \end{aligned}$$

Il vient alors : $f'(0) = (1-0^2)e^{-0} = 1\times 1 = 1$.

Comme $f'(0) \neq 3$, on en déduit que la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 n'est pas parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.
La proposition est donc fausse.

Question 8. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

Dans cette question, on peut écrire l'équation considérée sous la forme $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$.

La fonction f est une fonction polynôme et est, de fait, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$.

Le discriminant associé au trinôme $3x^2 + 8x + 4$ vaut : $\Delta = 8^2 - 4\times 3\times 4 = 64 - 48 = 16$.

On détermine alors facilement les deux valeurs annulant $f'(x)$. On obtient : -2 et $-\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, la fonction f' :

- S'annule en -2 et en $-\dfrac{2}{3}$.
- Est strictement positive sur les intervalles $]-\infty\,;-2[$ et $\left]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.
- Est strictement négative sur l'intervalle $\left]-2\,;-\dfrac{2}{3}\right[$.

On en déduit les variations de la fonction f. La fonction f est :

- Strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,;-2]$ et $\left[-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.
- Strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-2\,;-\dfrac{2}{3}\right]$.

On a enfin :

$$f(-2) = (-2)^3 + 4\times(-2)^2 + 4\times(-2) + 2 = -8 + 16 - 8 + 2 = 2$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4\times\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -\frac{8}{27} + \frac{16}{9} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{-8+48-72+54}{27} = \frac{22}{27}$$

Si on souhaite appliquer le théorème des valeurs intermédiaires conformément au nouveau programme, on doit raisonner sur un intervalle de longueur finie. On a facilement :

$$f(-3)=(-3)^3+4\times(-3)^2+4\times(-3)+2=-27+36-12+2=-1$$

On a alors :

- Sur l'intervalle $]-\infty\,;-3]$, la fonction *f* est strictement croissante.

  On a donc : $\forall x\in\,]-\infty\,;-3],\ f(x)\leq f(-3)=-1$.

  On en déduit : $\forall x\in\,]-\infty\,;-3],\ f(x)<0$.

  La fonction *f* ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty\,;-3]$.

- Sur l'intervalle $[-3\,;-2]$, la fonction *f* est strictement croissante. Elle y est continue en tant que fonction polynôme.
  D'après le théorème des valeurs intermédiaires (plus précisément ici, théorème de la bijection), la fonction *f* prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[f(-3)\,;f(-2)\right]=[-1\,;2]$.

  Comme $0\in[-1\,;2]$, la fonction *f* s'annulera donc une seule fois sur l'intervalle $[-3\,;-2]$.

- Sur l'intervalle $\left[-2\,;-\frac{2}{3}\right]$, la fonction *f* est strictement décroissante.

  On a donc : $\forall x\in\left[-2\,;-\frac{2}{3}\right],\ f(x)\geq f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{22}{27}$.

  On en déduit $\forall x\in\left[-2\,;-\frac{2}{3}\right],\ f(x)>0$.

  La fonction *f* ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[-2\,;-\frac{2}{3}\right]$.

- Sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$, la fonction *f* est strictement croissante.

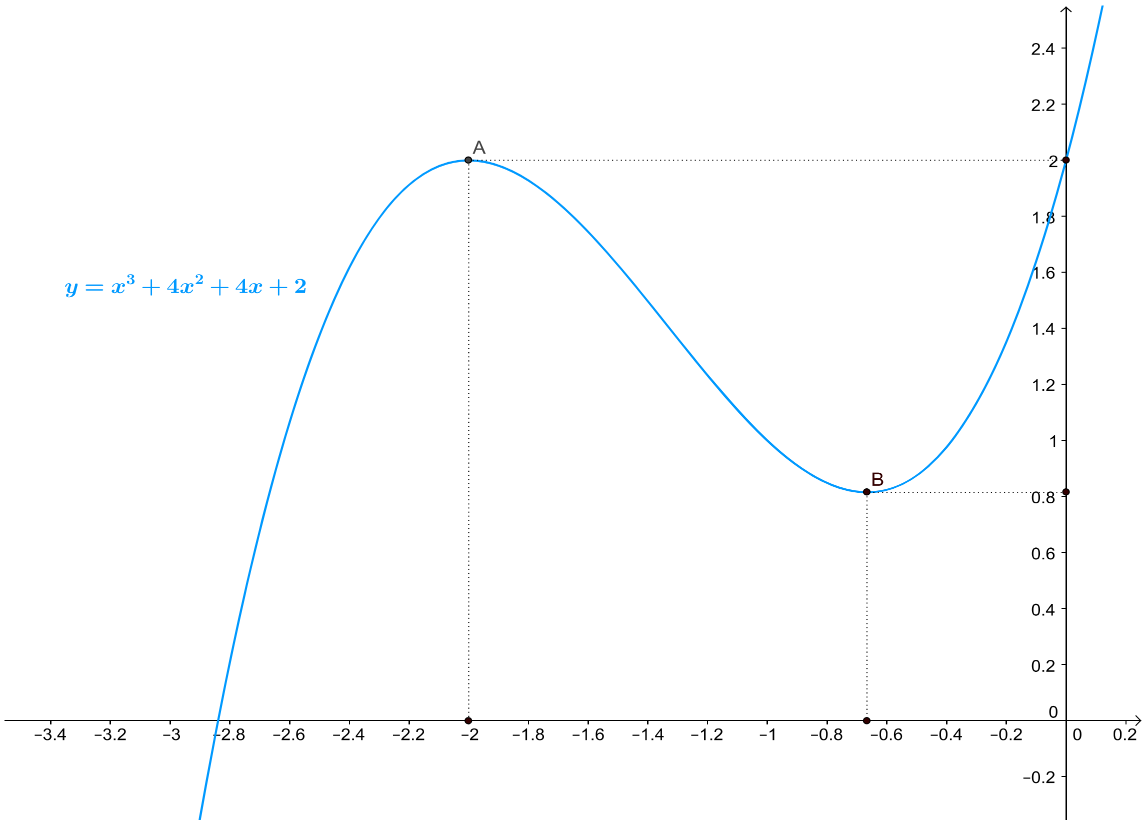
  On a donc : $\forall x\in\left[-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[,\ f(x)\geq f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{22}{27}$.

  On en déduit : $\forall x\in\left[-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[,\ f(x)>0$.

  La fonction *f* ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

Il découle de l'étude précédente que la fonction *f* s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.
En d'autres termes, l'équation $x^3+4x^2+4x=-2$ admet une unique solution réelle.
La proposition est donc fausse.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de la fonction *f*.



Question 9. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

Si l'on est habitué à l'écriture de programme sur calculatrice, on peut rapidement écrire le programme correspondant à l'algorithme fourni et obtenir rapidement la réponse.

A défaut, on peut rapidement construire le tableau suivant en faisant « tourner l'algorithme à la main » …

Passage dans la boucle « Tant que »	1	2	3
Valeurs de n et c avant traitement	1 et 1	2 et 5	3 et 14
Valeurs de n et c après traitement	2 et 5	3 et 14	4 et 30
$c \leq 20$?	OUI	OUI	NON

La dernière valeur de n est égale à 4.
La proposition est donc vraie.

Question 10. $\boxed{\text{VRAI}}$

On doit prendre garde de bien individualiser les deux dés : nous notons D1 le premier et D2 le second. Une issue de l'expérience aléatoire consistant à lancer les deux dés et lire les valeurs portées par les faces supérieures sera notée (d_1, d_2) où d_1 et d_2 sont deux entiers naturels compris entre 1 et 6.

Puisqu'il y a 6 valeurs possibles pour chacun des deux entiers d_1 et d_2, l'univers contient un total de $6\times 6=36$ issues équiprobables.

La variable aléatoire X est alors définie par $\text{X}=\max(d_1, d_2)$. Elle peut également prendre toutes les valeurs entières comprises entre 1 et 6.

- L'événement « $\text{X}=1$ » est réalisé par la seule issue $(1,1)$.

  On a donc : $p(\text{X}=1)=\frac{1}{36}$.
- L'événement « $\text{X}=2$ » est réalisé par les 3 issues $(1,2)$, $(2,2)$ et $(2,1)$.

  On a donc : $p(\text{X}=2)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.
- L'événement « $\text{X}=3$ » est réalisé par les 5 issues $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,2)$ et $(3,1)$.

  On a donc : $p(\text{X}=3)=\frac{5}{36}$.
- L'événement « $\text{X}=4$ » est réalisé par les 7 issues $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(4,3)$, $(4,2)$ et $(4,1)$.

  On a donc : $p(\text{X}=4)=\frac{7}{36}$.
- L'événement « $\text{X}=5$ » est réalisé par les 9 issues $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$, $(4,5)$, $(5,5)$, $(5,4)$, $(5,3)$, $(5,2)$ et $(5,1)$.

  On a donc : $p(\text{X}=5)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.
- L'événement « $\text{X}=6$ » est réalisé par les 11 issues $(1,6)$, $(2,6)$, $(3,6)$, $(4,6)$, $(5,6)$, $(6,6)$, $(6,5)$, $(6,4)$, $(6,3)$, $(6,2)$ et $(6,1)$.

  On a donc : $p(\text{X}=6)=\frac{11}{36}$.

Il vient alors :

$$\text{E}(\text{X})=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}=\frac{1+6+15+28+45+66}{36}=\frac{161}{36}$$

La proposition est donc vraie.

Remarque : on pouvait mener le calcul ci-dessus de façon plus … formelle.
La démarche ci-dessous peut facilement être généralisée à des dés à N faces.

On cherche $p(\mathrm{X}=k)$ où k est un entier naturel compris entre 1 et 6.

L'événement « $\mathrm{X}=k$ » est réalisé par l'issue (k,k) et par les issues de la forme $(k,\ p)$ ou (p,k) où p est un entier supérieur ou égal à 1 et strictement inférieur à k.

Si $k=1$, la seule issue qui réalise l'événement « $\mathrm{X}=1$ » est, comme on l'a vu ci-dessus, l'issue $(1,1)$.
Si $k>1$, il y a $k-1$ issues de la forme $(k,\ p)$ et également $k-1$ issues de la forme (p,k). Au total, il y a donc $1+2\times(k-1)=2k-1$ issues qui réalisent l'événement « $\mathrm{X}=k$ ». On constate que cette expression reste valable dans le cas où $k=1$.

En définitive, on a : $p(\mathrm{X}=k)=\dfrac{2k-1}{36}$.
Remarque : pour des dés comportant N faces, il vient $p(\mathrm{X}=k)=\dfrac{2k-1}{\mathrm{N}^2}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\times p(\mathrm{X}=k)=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\times\frac{2k-1}{\mathrm{N}^2}=\frac{1}{\mathrm{N}^2}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\times(2k-1)\\
&=\frac{1}{\mathrm{N}^2}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(2k^2-k\right)=\frac{1}{\mathrm{N}^2}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(2k^2-k\right)=\frac{1}{\mathrm{N}^2}\left\{2\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}k^2-\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}k\right\}\\
&=\frac{1}{\mathrm{N}^2}\left(2\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)(2\mathrm{N}+1)}{6}-\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{2}\right)=\frac{1}{\mathrm{N}^2}\times\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{6}\times\left\{2(2\mathrm{N}+1)-3\right\}\\
&=\frac{(\mathrm{N}+1)(4\mathrm{N}-1)}{6\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé les sommes classiques : $\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k=\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k^2=\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)(2\mathrm{N}+1)}{6}$.

Pour $\mathrm{N}=6$, il vient : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\dfrac{(6+1)(4\times 6-1)}{6\times 6}=\dfrac{7\times 23}{36}=\dfrac{161}{36}$. On retrouve le résultat obtenu précédemment.

Problème

Partie A

1) Notons d'abord que pour tout réel *x* strictement positif, on a :

$$f(x)=\ln\left[\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]=\ln\left(\frac{e}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)=\ln e-\ln 2+\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)=1-\ln 2+\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

La fonction $x\mapsto x+\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et sa dérivée est définie par : $x\mapsto 1-\frac{1}{x^2}$.

La fonction $x\mapsto \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (pour tout *x* réel strictement positif, on a : $x+\frac{1}{x}>0$) et sa dérivée est définie par : $x\mapsto \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\times\frac{x}{x+1}=\frac{x-1}{x}$.

Finalement, la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour

Comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $f'(x)$ est identique à celui de son numérateur.
Comme $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ et $x-1>0\Leftrightarrow x>1$, il vient :

- Si $x\in\left]0\,;1\right[$ alors $x-1<0$, soit $f'(x)<0$.
- Si $x=1$ alors $f'(x)=0$.
- Si $x>1$ alors $f'(x)>0$.

On en déduit :

> La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;1\right]$
> et strictement croissante sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

On note ainsi que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $x=1$. La valeur de ce minimum est :

$$f(1)=1-\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)=1-\ln 2+\ln 2=1$$

Détermination de la limite de *f* en 0 (à droite).
On cherche donc ici : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty\overset{\text{produit}}{\Rightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$$

Détermination de la limite de *f* en $+\infty$.
On cherche donc ici : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty\overset{\text{produit}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Finalement :

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

2) Le résultat $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ nous permet immédiatement de conclure que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe (C).

Par ailleurs, on a, pour tout réel *x* strictement positif :

$$f(x)-\ln\left(\frac{e}{2}x\right)=\ln\left[\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]-\ln\left(\frac{e}{2}x\right)=\ln\frac{\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\frac{e}{2}x}=\ln\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Or :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln(1)=0$$

Ainsi, les courbes (C) et (Γ) respectivement représentatives des fonctions f et $x\mapsto\ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ sont asymptotes en $+\infty$.

L'axe des ordonnées du repère et la courbe (Γ) d'équation $y=\ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ sont asymptotes à la courbe (C).

3) a) On a obtenu, à la question 1) : $f'(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$.

Pour tout réel *x* strictement positif, on a donc $-\frac{1}{x}<0$ et donc $f'(x)=1-\frac{1}{x}<1$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)<1$

b) Posons $g:x\mapsto g(x)=f(x)-x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour tout *x* réel strictement positif :

$$g'(x)=f'(x)-1$$

Or, à la question précédente, on a établi : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)<1$, c'est-à-dire $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g'(x)<0$.

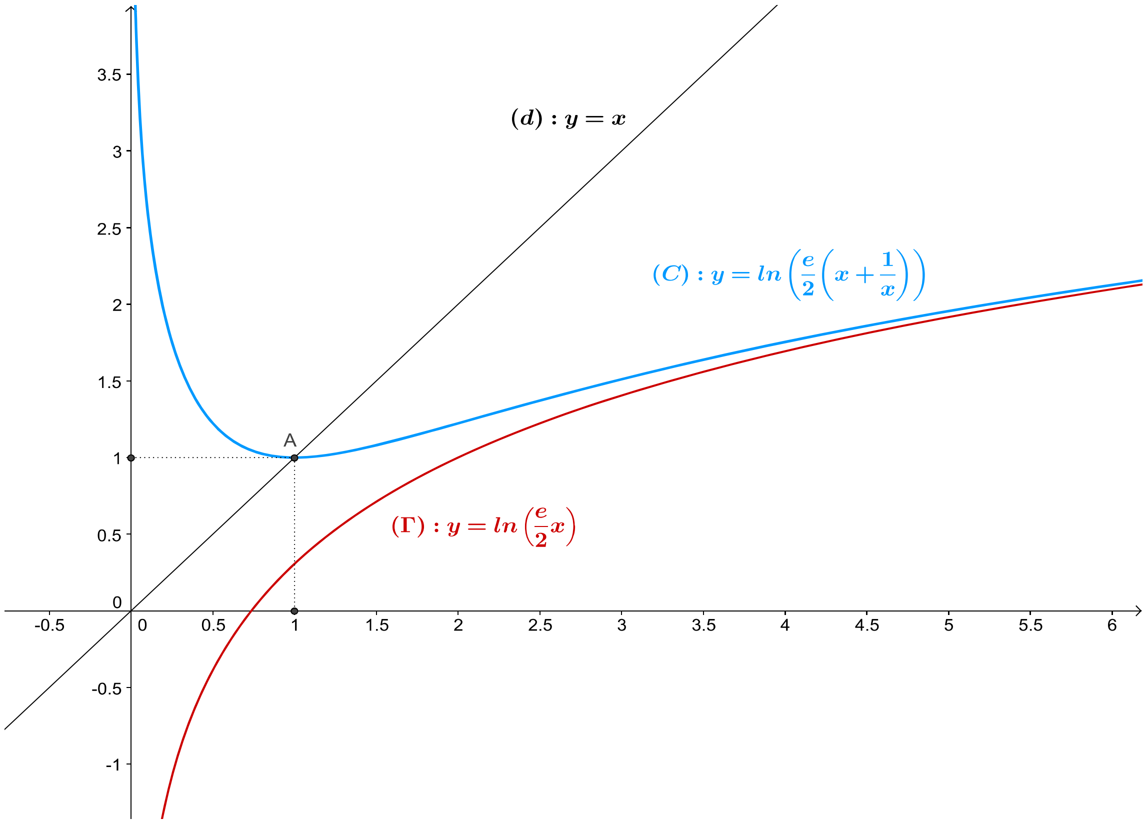
La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or, d'après la question 1), on a : $g(1)=f(1)-1=0$.
On déduit immédiatement des deux points précédents :

- Si $x\in\left]0\,;1\right[$ alors $g(x)>0$, soit $f(x)>x$.
- Si $x>1$ alors $g(x)<0$, soit $f(x)<x$.

Finalement :

Sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$, la courbe (C) est située au-dessus de la droite (d).
Sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$, la courbe (C) est située en-dessous de la droite (d).
La courbe (C) coupe la droite (d) au point $\mathrm{A}(1\,;1)$.

4) Nous fournissons ci-après une représentation graphique de la droite (d) (en noir) d'équation $y=x$, de la courbe (Γ) (en rouge) représentative de la fonction $x\mapsto\ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ et de la courbe (C) (en bleu) représentative de la fonction *f*.



Partie B

1) D'après la partie précédente, on a, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq 1$

Démontrons le résultat demandé par récurrence.

On considère pour cela, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } 1 \leq u_n \text{ »}$$

<u>Initialisation</u>

D'après l'énoncé, on a $u_0 \geq 1$.
La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit n un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie. C'est-à-dire : $1 \leq u_n$.
Comme la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, on a :
$f(1) \leq f(u_n)$, c'est-à-dire : $1 \leq u_{n+1}$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>
Pour tout entier naturel *n*, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.

La suite (u_n) est minorée par 1.

2) Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$.
   Par ailleurs, d'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1\,;+\infty[$.
   D'après la question 3) b) de la Partie A, la fonction g prend des valeurs négatives sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
   On déduit de ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$.
   Ainsi :

La suite (u_n) est décroissante.

3) La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est donc convergente.

La suite (u_n) est convergente.

Partie C

1) Dans le cas où $u_0 = 1$, on démontre par une récurrence immédiate que l'on a :
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

Lorsque $u_0 = 1$, la suite (u_n) est constante.

2) A la calculatrice, on obtient :

$u_1 \simeq 1{,}080\,043$
$u_2 \simeq 1{,}002\,962$
$u_3 \simeq 1{,}000\,004$

3) a) Considérons la fonction *h* définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $h : t \mapsto t - \ln(1+t)$.

La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est la composée de la fonction affine $t \mapsto 1+t$ dérivable sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ en tant que fonction polynôme et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction logarithme népérien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est dérivable sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.
La fonction h est ainsi dérivable sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ comme différence de deux fonctions (la fonction identité et la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$) dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel *t* de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on a alors :

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$$

Comme $t \in]-1\,;+\infty[\Leftrightarrow t > -1 \Leftrightarrow t+1 > 0$. Le signe de $h'(t)$ est donc celui du numérateur, c'est-à-dire *t*. Ainsi :

- Si $t \in]-1\,;0[$ alors $h'(t) < 0$.
- $h'(0) = 0$.
- Si $t \in \mathbb{R}_+^*$ alors $h'(t) > 0$.

On en déduit que la fonction *h* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1\,;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Elle admet donc un minimum pour $t = 0$.
Or, $h(0) = 0 - \ln(1+0) = -\ln 1 = 0$.
On a alors : $\forall x \in]-1\,;+\infty[, h(t) \geq h(0)$, soit $\forall x \in]-1\,;+\infty[, t - \ln(1+t) \geq 0$.
Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\forall x \in]-1\,;+\infty[, t \geq \ln(1+t)}$$

b) A la question 1) de la partie A, on a vu que l'on avait, pour tout *x* réel strictement positif : $f(x) = 1 - \ln 2 + \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Pour tout réel $h \geq 0$, on a $1+h \geq 1 > 0$. D'où :

$$\begin{aligned} f(1+h) - 1 &= 1 - \ln 2 + \ln\left(1+h+\frac{1}{1+h}\right) - 1 = \ln\left(1+h+\frac{1}{1+h}\right) - \ln 2 \\ &= \ln\left(\frac{(1+h)^2+1}{1+h}\right) - \ln 2 = \ln\left(\frac{h^2+2h+1+1}{2(1+h)}\right) = \ln\left(\frac{h^2+2h+2}{2(1+h)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{h^2+2(1+h)}{2(1+h)}\right) = \ln\left(\frac{h^2}{2(1+h)} + \frac{2(1+h)}{2(1+h)}\right) = \ln\left(1 + \frac{h^2}{2(1+h)}\right) \end{aligned}$$

Le résultat est établi.

$$\boxed{\forall h \in \mathbb{R}_+,\ f(1+h)-1=\ln\left(1+\frac{h^2}{2(1+h)}\right)}$$

c) Pour tout réel $h \geq 0$, on a $\dfrac{h^2}{2(1+h)} \geq 0$ et donc $\dfrac{h^2}{2(1+h)} > -1$.

On peut ainsi utiliser l'inégalité de la question a) ci-dessus et on obtient :

$$f(1+h)-1=\ln\left(1+\frac{h^2}{2(1+h)}\right) \leq \frac{h^2}{2(1+h)}$$

Comme $1+h \geq 1$, on a $\dfrac{1}{1+h} \leq 1$ et donc $\dfrac{h^2}{2(1+h)} \leq \dfrac{h^2}{2}$.

D'où : $f(1+h)-1=\ln\left(1+\dfrac{h^2}{2(1+h)}\right) \leq \dfrac{h^2}{2(1+h)} \leq \dfrac{h^2}{2}$.

Par ailleurs, $\dfrac{h^2}{2(1+h)} \geq 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{h^2}{2(1+h)} \geq 1 \Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{h^2}{2(1+h)}\right) \geq \ln 1 \Leftrightarrow f(1+h)-1 \geq 0$

Finalement, on a bien : $0 \leq f(1+h)-1 \leq \dfrac{h^2}{2}$.

$$\boxed{\forall h \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq f(1+h)-1 \leq \frac{h^2}{2}}$$

4) Notons d'abord que, la suite (u_n) étant minorée par 1 (cf. question 1) de la partie B), on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq 0$.

On a alors, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1=f(u_n)-1=f(1+v_n)-1$$

Comme $v_n \geq 0$, on peut utiliser le résultat de la question précédente et on obtient :

$$f(1+v_n)-1 \leq \frac{v_n^2}{2}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leq \frac{v_n^2}{2}}$$

5) D'après la question précédente, on a déjà : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0$.

Il convient donc d'établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

Nous allons établir ce résultat par récurrence.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$:

$$\mathscr{P}_n : « \ v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}} \ »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 1$, on a : $2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}} = 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{1-1}} = 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^0} = 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^1 = 2 \times \frac{v_1}{2} = v_1$.

Ainsi, on a bien $v_1 \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{1-1}}$. La propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *n* un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire : $v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

On s'intéresse à v_{n+1}.

D'après la question précédente, on a : $v_{n+1} \leq \frac{v_n^2}{2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$. Les membres de cette inégalité étant positifs, on en déduit, en élevant au carré :

$$v_n^2 \leq \left[2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right]^2 = 2^2 \times \left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}\times 2} = 4\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1+1}} = 4\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{(n+1)-1}}$$

Il vient alors :

$$v_{n+1} \leq \frac{v_n^2}{2} \leq \frac{1}{2} \times 4\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{(n+1)-1}} = 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{(n+1)-1}}$$

L'inégalité $v_{n+1} \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{(n+1)-1}}$ nous permet d'affirmer que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>

Pour tout entier naturel non nul n, $v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}}$$

6) $u_0 = \frac{3}{2}$.

On a : $u_p - 1 \leq 10^{-20} \Leftrightarrow v_p \leq 10^{-20}$.

D'après le résultat de la question précédente, on a : $v_p \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{p-1}}$.

Alors : si $2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{p-1}} \leq 10^{-20}$ on aura $v_p \leq 10^{-20}$.

Comme $u_0 = \frac{3}{2}$, on a :

$$u_1 = f(u_0) = 1 - \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}}\right) = 1 - \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) = 1 - \ln 2 + \ln\frac{13}{6} = 1 + \ln\frac{13}{12}$$

D'où : $v_1 = u_1 - 1 = 1 + \ln\frac{13}{12} - 1 = \ln\frac{13}{12}$.

On a alors :

$$2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{p-1}} \leq 10^{-20}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{p-1}}\right] \leq \ln 10^{-20} \Leftrightarrow \ln 2 + 2^{p-1}\ln\frac{v_1}{2} \leq -20\ln 10 \Leftrightarrow 2^{p-1}\ln\frac{v_1}{2} \leq -20\ln 10 - \ln 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{p-1}\ln\frac{v_1}{2} \leq -20(\ln 2 + \ln 5) - \ln 2 \Leftrightarrow 2^{p-1}\ln\frac{v_1}{2} \leq -21\ln 2 - 20\ln 5 \Leftrightarrow 2^{p-1} \geq \frac{-21\ln 2 - 20\ln 5}{\ln v_1 - \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{p-1} \geq \frac{-21\ln 2 - 20\ln 5}{\ln\left(\ln\frac{13}{12}\right) - \ln 2} \Leftrightarrow (p-1)\ln 2 \geq \ln\left(\frac{-21\ln 2 - 20\ln 5}{\ln\left(\ln\frac{13}{12}\right) - \ln 2}\right) \Leftrightarrow p \geq 1 + \frac{\ln\left(\frac{-21\ln 2 - 20\ln 5}{\ln\left(\ln\frac{13}{12}\right) - \ln 2}\right)}{\ln 2}$$

On a : $1+\dfrac{\ln\left(\dfrac{-21\ln 2-20\ln 5}{\ln\left(\ln\dfrac{13}{12}\right)-\ln 2}\right)}{\ln 2}\simeq 21,95$. Ainsi, on a $p\geq 22\Rightarrow u_p-1\leq 10^{-20}$.

$$\boxed{\text{A partir du rang } p=22\text{, on peut affirmer que l'on a } u_p-1\leq 10^{-20}.}$$

La relation obtenue à la question 4) nous permet de dire que la convergence (vers 0) de la suite (v_n) (qui équivaut à la convergence vers 1 de la suite (u_n)) est très rapide : il s'agit d'une convergence (au moins) quadratique (cet adjectif correspondant à l'exposant 2 du terme majorant). La question 6 permet d'illustrer la rapidité de cette convergence …