

Algèbre de BOOLE

Définition et vocabulaire

→ Analogies entre logique des propositions et ensembles

Considérons le tableau suivant :

Logique des propositions	Ensembles
$(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ET } P)$	$A \cap B = B \cap A$
$(P \text{ ET } \bar{P}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
$(P \text{ OU } \bar{P}) \Leftrightarrow \mathcal{V}$	$A \cup \bar{A} = E$

Remarques :

- \mathcal{F} correspond à toute proposition dont la table de Boole ne contient que des 0 ; \mathcal{V} correspond à toute proposition dont la table de Boole ne contient que des 1.
- La deuxième équivalence est connue sous le nom de « théorème de contradiction » (une proposition et son contraire ne peuvent être vraies (ou fausses) toutes les deux !).
- La troisième équivalence est connue sous le nom de « théorème du tiers exclu » (une proposition est soit vraie soit fausse ... il n'y a pas d'autre possibilité).

L'algèbre de Boole va permettre de formaliser ces analogies dans un autre langage reposant sur les équivalences suivantes :

Propositions	P	Q	\mathcal{F}	\mathcal{V}	ET	OU	NON	\Leftrightarrow
Ensembles	A	B	\emptyset	E	\cap	\cup	\complement_E	=
Algèbre de Boole	a	b	0	1	\times	+	\bar{a}	=

Considérons alors un ensemble E sur lequel on a défini une addition notée « + », une multiplication notée « . » ou « \times » et une application $a \rightarrow \bar{a}$. On suppose par ailleurs que E contient deux éléments particuliers 0 et 1.

On dira que $(E; +; \times; \bar{\quad})$ est une algèbre de Boole si pour tout triplet $(a; b; c)$ d'éléments de E on a :

$a + b = b + a$	(1)	}	commutativité
$a.b = b.a$	(2)		
$a + 0 = a$	(3)	}	éléments neutres
$a.1 = a$	(4)		
$a + b.c = (a + b).(a + c)$	(5)	}	distributivités
$a.(b + c) = a.b + a.c$	(6)		
$a + \bar{a} = 1$	(7)		tiers exclu
$a.\bar{a} = 0$	(8)		non contradiction

ATTENTION ! « 0 » et « 1 » sont des notations facilitant la lisibilité mais ne désignant pas les réels 0 et 1 !

Remarques :

- Comme dans \mathbb{R} , la multiplication est prioritaire sur l'addition. Le parenthésage et l'écriture des opérations en découlent.
- L'addition et la multiplication booléennes ne sont pas l'addition et la multiplication réelles.

→ Algèbre de Boole des propositions

Théorème

L'ensemble des propositions muni des connecteurs ET et OU et de l'application : $P \rightarrow \text{NON } P$ est une algèbre de Boole.

Remarques :

- Les connecteurs ET et OU jouent les rôles respectifs de la multiplication et de l'addition ;
- \mathcal{F} , \mathcal{V} et \Leftrightarrow sont équivalents à 0, 1 et =.

→ Algèbre de Boole et parties d'un ensemble

Théorème

Soit E un ensemble quelconque.

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

$\mathcal{P}(E)$ muni de l'intersection (\cap), de la réunion (\cup) et de l'application : $A \rightarrow \complement_E A$ est une algèbre de Boole.

Remarques :

- L'intersection et la réunion jouent les rôles respectifs de la multiplication et de l'addition ;
- \emptyset et E sont équivalents à 0 et 1.

→ Algèbre de Boole et binaire

On considère un ensemble comportant deux éléments (il s'agit donc d'une paire) que l'on note **0** et **1** (il sont sans rapport avec les nombres 0 et 1).

On définit dans cet ensemble une addition et une multiplication comme suit :

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a + b</i>	<i>a.b</i>
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

On définit sur cet ensemble une application notée « $\bar{}$ » :

a	b
0	1
1	0

On a alors le théorème suivant :

Théorème
 L'ensemble $\{0;1\}$ muni de l'addition, de la multiplication et de l'application « $\bar{}$ » définies ci-dessus est une algèbre de Boole.

Propriétés des opérations

→ Propriétés principales d'une algèbre de Boole

Outre les huit propriétés fondamentales caractérisant une algèbre de Boole (elles doivent être vérifiées pour que l'on puisse parler d'une telle algèbre), on doit en mentionner onze autres.

$\overline{\overline{a}} = a$	(9)	}	involution
$a + 1 = 1$	(10)		
$a \cdot 0 = 0$	(11)	}	éléments absorbants
$a + a = a$	(12)		
$a \cdot a = a$	(13)	}	idempotence
$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$	(14)		
$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$	(15)	}	lois de Morgan
$a + a \cdot b = a$	(16)		
$a \cdot (a + b) = a$	(17)	}	absorption
$(a + b) + c = a + (b + c)$	(18)		
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(19)	}	associativité

→ Algèbre de Boole, propositions et parties d'un ensemble.

Le tableau de la page suivante fournit les équivalences fondamentales existant entre l'algèbre de Boole, la logique des propositions et la théorie des ensembles.

On a fait apparaître dans l'ordre :

- les huit propriétés servant à définir une algèbre de Boole ;
- les onze propriétés additionnelles mentionnées plus haut.

Algèbre de Boole	Propositions	Ensembles
$a + b = b + a$ $a.b = b.a$	$(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ OU } P)$ $(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ET } P)$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
$a + 0 = a$ $a.1 = a$	$P \text{ OU } \mathcal{F} \Leftrightarrow P$ $P \text{ ET } \mathcal{V} \Leftrightarrow P$	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap E = A$
$a + b.c = (a + b).(a + c)$ $a.(b + c) = a.b + a.c$	$(P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow (P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)$ $(P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)) \Leftrightarrow (P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$a + \bar{a} = 1$ $a.\bar{a} = 0$	$P \text{ OU } \bar{P} \Leftrightarrow \mathcal{V}$ $P \text{ ET } \bar{P} \Leftrightarrow \mathcal{F}$	$A \cup \bar{A} = E$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$
$\bar{\bar{a}} = a$	$\bar{\bar{P}} = P$	$\bar{\bar{A}} = A$
$a + 1 = 1$ $a.0 = 0$	$(P \text{ OU } \mathcal{V}) \Leftrightarrow P$ $(P \text{ ET } \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$	$A \cup E = E$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
$a + a = a$ $a.a = a$	$(P \text{ OU } P) \Leftrightarrow P$ $(P \text{ ET } P) \Leftrightarrow P$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
$\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$ $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$	$\overline{P \text{ OU } Q} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ ET } \bar{Q}$ $\overline{P \text{ ET } Q} \Leftrightarrow \bar{P} \text{ OU } \bar{Q}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$a + a.b = a$ $a.(a + b) = a$	$(P \text{ OU } (P \text{ ET } Q)) \Leftrightarrow P$ $(P \text{ ET } (P \text{ OU } Q)) \Leftrightarrow P$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a.b).c = a.(b.c)$	$(P \text{ OU } (Q \text{ OU } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } Q) \text{ OU } R)$ $(P \text{ ET } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ET } Q) \text{ ET } R)$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Formes canoniques d'une fonction booléenne

→ Fonction booléenne.

Soit $(E; +; \times; \bar{})$ une algèbre de Boole.

Une fonction booléenne f de n variables booléennes de E^n dans E est une application qui à tout n -uplet de E fait correspondre un élément de E construit à l'aide des opérations booléennes.

Exemples :

$$f(a, b, c) = a + a\bar{b} + bc$$

$$g(a, b, c, d) = abc + bc\bar{d} + ad + b$$

→ Mintermes et maxtermes.

Un « minterme » de n variables booléennes est un produit comportant n facteurs, chaque facteur correspondant à une variable donnée ou à son complémentaire.

Un « maxterme » de n variables booléennes est une somme comportant n termes, chaque terme correspondant à une variable donnée ou à son complémentaire.

Exemple.

Soit a, b, c et d quatre variables booléennes.

$ab\bar{c}d$, $a\bar{b}\bar{c}d$, $abcd$ et $\bar{a}\bar{b}cd$ sont quatre mintermes construits à partir des variables a, b, c et d .
 $a+b+c+\bar{d}$, $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$ et $a+\bar{b}+c+\bar{d}$ sont trois maxtermes construits à partir des variables a, b, c et d .

Remarque : à partir de n variables booléennes, on peut élaborer 2^n mintermes et 2^n maxtermes.

→ Formes canoniques disjonctive et conjonctive d'une fonction booléenne.

Soit f une fonction booléenne de E^n dans E .

Il est possible d'écrire f de façon unique sous la forme d'une somme de mintermes.

Cette somme est appelée « forme disjonctive » de f .

De façon analogue, il est possible d'écrire f sous la forme d'un produit de maxtermes.

Ce produit est appelé « forme conjonctive » de f .

Exemple.

Considérons la fonction booléenne : $f(a, b, c) = a\bar{b}$.

On a :

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= a\bar{b}1 && (1 \text{ est élément neutre de la multiplication}) \\ &= a\bar{b}(c + \bar{c}) && (\text{principe du tiers exclus}) \\ &= a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} && (\text{distributivité}) \end{aligned}$$

$a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c}$ est la forme canonique disjonctive de la fonction f .

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= a\bar{b} + c\bar{c} \\ &= (a\bar{b} + c)(a\bar{b} + \bar{c}) \\ &= (a + c)(\bar{b} + c)(a + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c}) \\ &= ((a + c) + b\bar{b})((\bar{b} + c) + a\bar{a})((a + \bar{c}) + b\bar{b})((\bar{b} + \bar{c}) + a\bar{a}) \\ &= (a + c + b)(a + c + \bar{b})(\bar{b} + c + a)(\bar{b} + c + \bar{a})(a + \bar{c} + b)(a + \bar{c} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{c} + a)(\bar{b} + \bar{c} + \bar{a}) \\ &= (a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

$(a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ est la forme canonique conjonctive de la fonction f .

Diagrammes de Karnaugh

Note : dans cette partie, on ne considère que des variables booléennes binaires (typiquement, ne pouvant prendre que les valeurs logique 0 ou 1).

→ Définition

Un diagramme de Karnaugh est un moyen simple de représenter une expression (ou fonction) booléenne comportant un nombre donné de variables.

Il se présente sous la forme d'un tableau (voir ci-dessous) ne comportant que des 1 (les éventuelles cases comportant des 0 sont laissées vides).

Nous fournissons ci-dessous les diagrammes de Karnaugh correspondant à l'expression booléenne $X = a\bar{b}$ (X ne vaut 1 que si a vaut 1 et b vaut 0).

→ Cas de deux variables :

	b	0	1
a			
0			
1		1	

→ Cas de trois variables :

	bc	00	01	11	10
a					
0					
1		1	1		

On notera la disposition particulière de la première ligne dans le cas du deuxième diagramme : l'idée est de ne changer que l'une des deux valeurs (celle de **b** ou celle de **c**) en passant d'une colonne à une autre.

→ Exemples simples

Nous fournissons ci-dessous les diagrammes de Karnaugh d'expressions simples mais fondamentales : leur maîtrise permet d'identifier, dans des diagrammes plus complexes, des configurations connues et, ainsi, de simplifier des expressions booléennes.

A chaque fois, nous fournissons deux diagrammes correspondant aux deux contextes « deux variables » et « trois variables ».

□ $X = a$

a \ b	0	1
0		
1	1	1

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

□ $X = \bar{a}$

a \ b	0	1
0	1	1
1		

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

□ $X = ab$

a \ b	0	1
0		
1		1

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	1

□ $X = a + b$

a \ b	0	1
0		1
1	1	1

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	1

→ Mise en œuvre des diagrammes de Karnaugh

Démontrer une égalité

Pour prouver que deux expressions sont égales, on peut montrer que leurs diagrammes de Karnaugh sont identiques.

Simplification d'expressions

Principe général : on construit le diagramme de Karnaugh de l'expression considéré. Le diagramme obtenu permet de récrire l'expression plus simplement en utilisant la propriété précédente (deux propositions sont égales si, et seulement si, leurs diagrammes de Karnaugh sont identiques).

Considérons l'expression : $X = a.\bar{a}.b + a + \bar{a}.b$.

On suppose que l'on travaille dans un contexte à deux variables.

On demande, à l'aide de diagrammes de Karnaugh, de simplifier X.

On commence par déterminer le diagramme de Karnaugh correspondant à X.

Pour cela, on va déterminer les diagrammes de Karnaugh de $X_1 = a.\bar{a}.b$ et $X_2 = a + \bar{a}.b$

Le diagramme de Karnaugh de $\bar{a}.b$ s'écrit :

a \ b	0	1
0		1
1		

On en déduit alors le diagramme de Karnaugh de $\bar{a}.b$ puis celui de $X_1 = a.\bar{a}.b$:

a \ b	0	1
0	1	
1	1	1

a \ b	0	1
0		
1	1	1

(Note : on reconnaît, dans ce dernier diagramme, le diagramme de Karnaugh de a . A titre d'exercice simple, on peut montrer par le calcul que l'on a : $X_1 = a$)

A partir du diagramme de Karnaugh de $\bar{a}.b$, on va déterminer celui de $a + \bar{a}.b$ puis celui de $X_2 = \overline{a + \bar{a}.b}$:

a \ b	0	1
0		1
1	1	1

a \ b	0	1
0	1	
1		

En effectuant la somme : $X_1 + X_2$, on obtient finalement le diagramme de Karnaugh de X :

b a	0	1
0	1	
1	1	1

On regroupe les « 1 » par groupe de deux :

- Verticalement : la première colonne correspond à \bar{b} ;
- Horizontalement : la deuxième colonne correspond à a .

On en déduit finalement :

$$X = a + \bar{b}$$

Obtention de formes canoniques

1. forme canonique disjonctive

Nous allons travailler à partir de l'exemple suivant correspondant au diagramme de Karnaugh d'une expression X non fournie :

bc a	00	01	11	10
0		1		
1			1	1

Le « 1 » de la première ligne correspond à $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$. Avec ces valeurs des trois variables, le seul minterme égal à « 1 » est : $\bar{a}\bar{b}.c$.

En raisonnant de façon analogue, les mintermes correspondant aux « 1 » de la deuxième ligne sont (en lisant de la gauche vers la droite) : $a.b.c$ et $a.b.\bar{c}$.

On en déduit, finalement : $X = a.b.c + a.b.\bar{c} + \bar{a}\bar{b}.c$

De façon générale, la forme canonique disjonctive d'une expression (ou d'une fonction) booléenne comporte autant de mintermes que son diagramme de Karnaugh comporte de « 1 ».

2. forme canonique conjonctive

Nous allons cette fois travailler à partir de l'exemple suivant $f(a,b,c) = a\bar{b}$, que nous avons déjà vu (cf l'obtention, par le calcul, de la forme canonique conjonctive de cette fonction) :

	bc	00	01	11	10
a					
0					
1	1	1			

Un maxterme est nul si, et seulement si, chaque terme du maxterme est nul.

On va donc considérer ici les « 0 » du diagramme de Karnaugh.

Par exemple, le premier « 0 » (première ligne, première colonne) correspond à : $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$. Le maxterme correspondant s'écrit immédiatement : $a + b + c$.

Le deuxième « 0 » (première ligne, deuxième colonne) correspond à : $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$. Le maxterme correspondant s'écrit donc : $a + b + \bar{c}$.

On procédant ainsi pour tous les « 0 » du diagramme, on obtient finalement :

$$f(a,b,c) = a\bar{b} = (a + b + c)(a + \bar{b} + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

On retrouve la forme obtenue par le calcul.

De façon générale, la forme canonique conjonctive d'une expression (ou d'une fonction) booléenne comporte autant de maxtermes que son diagramme de Karnaugh comporte de cases vides.